

THÈSES

présentées

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

par

B.V. ROBOUCH

1^{re} Thèse:

**ÉTUDE
DE LA TOPOGRAPHIE DU CHAMP MAGNÉTIQUE
ET
OPTIQUE DES TRAJECTOIRES DE SORTIE
DES PARTICULES DANS UN ACCÉLÉRATEUR FFAG
DU TYPE OHKAWA**

2^{me} Thèse:

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Soutenues le 16 Décembre, 1961 devant la Commission d'Examen :

MM. A. SARAZIN

Président

J. LAFOUCRIÈRE

Mme M. ERICSON

} Membres du Jury

L. LE MOIGNE

Invité

THÈSES

présentées

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

par

B.V. ROBOUCH

1^{re} Thèse:

**ÉTUDE
DE LA TOPOGRAPHIE DU CHAMP MAGNÉTIQUE
ET
OPTIQUE DES TRAJECTOIRES DE SORTIE
DES PARTICULES DANS UN ACCÉLÉRATEUR FFAG
DU TYPE OHKAWA**

2^{me} Thèse:

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Soutenues le 16 Décembre, 1961 devant la Commission d'Examen:

MM. A. SARAZIN

Président

J. LAFOUCRIÈRE

Mme M. ERICSON

} Membres du Jury

L. LE MOIGNE

Invité



UNIVERSITÉ DE LYON - FACULTÉ DES SCIENCES

Doyens honoraires

MM. LONGCHAMBON
DOUIN
MOUSSA

Professeurs honoraires

MM. LOCQUIN
de LARAMBERGUE
DOEUVRE

MM. SOLLAUD
MENTZER
MOUSSA

Doyen

M. GAUTHIER H.

Assesseur

M. BRACONNIER

Professeurs

MM. LONGCHAMBON	Minéralogie
DEJARDIN	Physique générale
DOUIN	Botanique
EYRAUD H.	Calcul différentiel et intégral
COURTY	Chimie-physique
PRETTRE	Chimie industrielle
KUHNER	Microbiologie et Mycologie
MALECOT	Mécanique rationnelle et appliquée
PÂRIS	Chimie minérale
AUMERAS	Chimie
COLONGE	Chimie organique
FLANDRIN	Géologie appliquée
JANIN	Physique expérimentale
BERNARD	Physique industrielle
DUFAY J.	Astronomie
NIGON	Zoologie expérimentale
GAUTHIER H.	Géologie
VIRET	Géologie
WAUTIER	Zoologie
CHOPIN	Chimie biologique
CUEILLERON	Chimie
BRACONNIER	Mathématiques
EYRAUD Ch.	Chimie Physique appliquée
SARAZIN	Physique nucléaire
PERES	Physiologie
BOIDIN	Botanique
MESNARD	Physique
GRANDMONTAGNE	Physique

Professeurs sans chaire

MM. BOUTILLIER	Minéralogie
DREUX	Chimie organique
LAFOUCRIÈRE	Physique nucléaire
TEICHNER	Chimie industrielle
GAUME	Physique
MERLIN	Chimie M.P.C.
PACHECO	Chimie biologique
PAVANS	
de CECCATTY	Zoologie
PHILBERT	Physique nucléaire

Maîtres de Conférences

MM. DEPRAZ	Physique nucléaire
FERON	Mathématiques
BERSILLON	Physiologie végétal S.P.C.N.
DAVID L.	Géologie
GAUTHIER J.	Chimie
LAFORGUE	Physique
LEGAY	Zoologie expérimentale S.P.C.N.
UZAN	Physique S.P.C.N.
CHENEVOY	Géologie appliquée
M ^{lle} MAITROT	Physique
MM. CHANEL	Psychophysiologie
ASCH	Physique
DUFAY M.	Physique
GINET	Zoologie
MAURY	Mathématiques
MICHEL	Minéralogie
M ^{me} ERICSON	Physique générale
MM. GEVIN	Géologie
PONASSE	Mathématiques
MARTEZ	Mécanique
CHÉRY	Physique
LEFEBVRE	Mathématiques
D'INCAN	Physique
COHEN-ADAD	Chimie
PERNET	Mathématiques

Maîtres de Conférences adjoints

M. PIERRON	Chimie
M. LEMONDE	Physique

Secrétaire principal honoraire

M. ROUX

Secrétaire principal

M. BURNET



Вечной и Светлой Памяти

Моей Любимой Бабушки.

(A la mémoire de ma grand-mère.)



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41553627_0032

INDEX DE QUELQUES SYMBOLES UTILISÉS DANS LE TEXTE

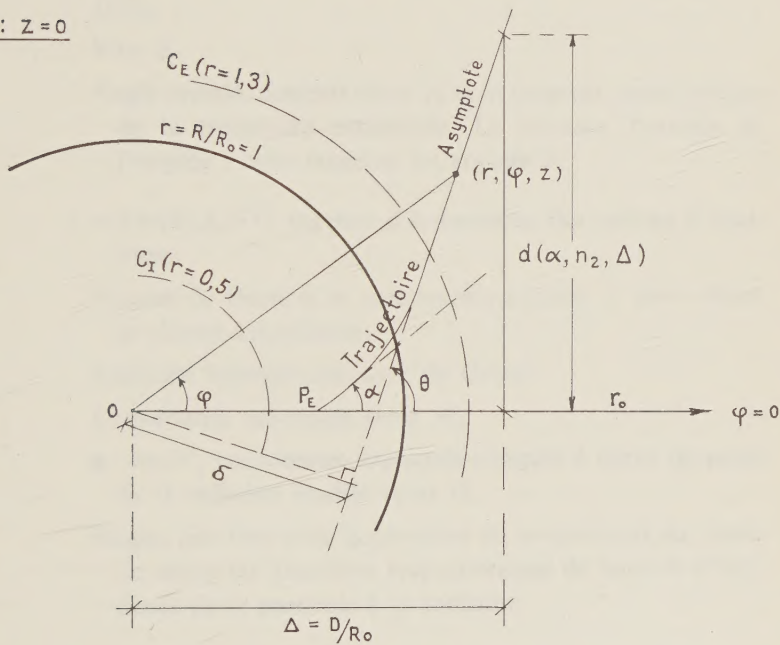
Lettres latines

$\vec{A}$	Potentiel vecteur dont dérive l'induction magnétique $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$.
B_0	Valeur maximum de l'induction magnétique (en w/m^2) que crée l'accélérateur dans le plan $Z = 0$.
D	Distance (en mètres) mesurée radialement à partir du centre de l'accélérateur.
$d : d(\alpha, n_2)$	Distance normale à l'axe $\varphi = 0$ du point ($r = A$; $\varphi = 0$; $z = 0$) à la trajectoire définie par α .
$ \bar{d} $	Valeur limite que nous prenons pour $ d $ et définie soit par la valeur du maximum (par rapport à α) de $d(\alpha)$, soit par la plus grande des deux valeurs : $d(\alpha)$ maximum et $d(\alpha)$ minimum pris en valeur absolue.
$\hat{d}$	Valeur de $ \bar{d} $, pour un A donné, lorsque $d(\alpha, n_2)$ maximum $= -d(\alpha, n_2)$ minimum. La valeur de n_2 qui permet de satisfaire à cette égalité définit ce que nous appelons le n_2 optimum ou $\hat{n}_2$.
E	Energie totale de la particule avant la collision.
E_0	Energie au repos de la particule considérée.
$h_0(r)$ et $h_T(r)$	Cf. équations (3.9) et (3.10).
N	Périodicité azimutale de l'accélérateur.
n_1 et n_2	Indice de champ changé de signe respectivement pour la région d'accélération $R < R_0(n_1 = 7)$, et la région du champ de fuites.
$\hat{n}_2$	Indice du champ de fuites optimum changé de signe (voir $\hat{d}$).

P_E	Point d'intersection des orbites d'équilibre correspondant à l'énergie considérée.
p et p_0	Quantités de mouvement de la particule respectivement après et avant la collision.
R	Coordonnée radiale du système de référence cylindrique (R, ϕ, Z) lié au trièdre orthonormé direct $(\vec{l}, \vec{m}, \vec{k})$.
R_0	Rayon de l'accélérateur (en mètres) : défini comme la distance à l'axe de l'accélérateur du point du plan $Z = 0$ auquel le champ magnétique est le plus intense.
R_1	Cf. équation (3.10) et suite.
R_2	R_1^{7/n_2} .
r	R/R_0 coordonnée radiale normée, définissant avec ϕ et z le système des coordonnées cylindriques normées.
$\vec{r}_0$	Rayon vecteur définissant le point de collision P_E .
Secteur D et Secteur F Voir équations (4.1) et suite.	
T	Transparence de l'accélérateur vis-à-vis de particules collidées sortantes, et définie comme l'angle solide divisé par 4π permettant la sortie pour des conditions données.
T_E et T_I	Respectivement transparences relatives aux sorties vers l'extérieur et par l'intérieur de l'anneau de l'accélérateur.
$T_T = T_E + T_I$	Transparence totale.
U	Potentiel scalaire dont dérive l'induction magnétique : $\vec{B} = -\text{grad } U$.
U_0	Valeur de U définissant la forme des pièces polaires adoptées.
u_0	$u_0(r, z) = U/B_0 R_0 \cos N\phi$.
Z	Coordonnée axiale (voir R).
z	Z/R_0 coordonnée axiale normée (voir r).
$\hat{z}$	Demi-hauteur de la chambre à vide.

Schéma d'identification des symboles

Plan : $z=0$



Lettres grecques

α	Angle que fait la direction de recul de la particule avec $\vec{r}_0$.
$\alpha_0 = \alpha_0(n_2, \Delta)$	Angle définissant l'intervall angulaire pour la sortie à l'extérieur du secteur F , et tel que si $ \alpha \leq \alpha_0$, $ d \leq \bar{d} $.
$\hat{\alpha}_0 = \hat{\alpha}_0(\Delta)$	Valeur de α_0 correspondant à $n_2 = \hat{n}_2$ (voir $\hat{d}$).
γ	E/E_0 .
Δ	D/R_0 .
δ	Voir θ .
θ	Angle orienté, compris entre $\vec{r}_0$ et la tangente asymptotique de la trajectoire considérée. La distance normale de l'origine à cette tangente est appelée δ .
λ	$= (p/qB_0R_0)^{\frac{1}{n+1}}$ rapport d'homothétie des orbites d'équilibre.
$\vec{\pi}$ et π	Vecteur de Hertz et sa composante suivant $\vec{k}$ dont dérive le champ magnétique.
σ	Fonction hypergéométrique de Gauss.
ϕ	Coordonnée azimutale (voir R).
φ	$\phi - k\pi/N$: coordonnée azimutale comptée à partir du point de la collision étudiée (voir r).
ψ et ψ_0	Angles que font avec la direction du mouvement du centre de masse les directions respectivement de recul et d'incidence de la particule à la collision.

AVANT-PROPOS

Je tiens à rendre hommage à la mémoire de M. le Professeur J. THIBAUD, Directeur de l'Institut de Physique Nucléaire, sous la direction de qui nous avons commencé le présent travail. C'est avec une profonde reconnaissance que je me souviens des encouragements qu'il n'a cessé de me prodiguer et de l'appui que j'ai toujours trouvé auprès de lui.

Le présent travail a été réalisé dans les laboratoires de l'ORGANISATION EUROPÉENNE POUR LES RECHERCHES NUCLÉAIRES. Il a pu être mené à bien grâce à l'attribution qui m'a été faite d'une bourse FORD par cette Organisation, ainsi qu'à une bourse de Broglie délivrée sous le patronage du Commissariat à l'Energie Atomique.

Qu'il me soit permis d'exprimer ma reconnaissance à M. ADAMS et au Professeur WEISSKOPF, Directeurs du CERN, ainsi qu'à M. DEBIESSE du Commissariat à l'Energie Atomique.

Je remercie vivement M. le Professeur SARAZIN, Directeur de l'Institut de Physique Nucléaire de Lyon, d'avoir bien voulu accepter que je poursuive mes recherches dans la direction engagée, ainsi que pour le support moral et matériel qu'il m'a apporté inlassablement.

Mes chaleureux remerciements vont à M. le Professeur LAFOUCRIÈRE pour les fructueuses discussions que j'ai eues avec lui, ainsi que pour ses conseils et sa patience lors de la mise au point du présent travail.

Je remercie Madame ERICSON, Maître de Conférences, pour l'intérêt qu'elle a bien voulu porter à ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude au Docteur A. SCHOCH, Directeur de l'« Accelerator Research Group » du CERN pour l'aide et l'appui, doublés d'un intérêt constant et attentif que j'ai toujours trouvés auprès de lui.

Je remercie le Docteur N. VOGT-NILSON pour les conseils précieux qu'il m'a donnés lors de la programmation de notre problème sur la calculatrice numérique.

Je ne saurais oublier les discussions que j'ai eues avec M. le Professeur Y. BERNARD de l'Institut National des Sciences et Techniques Nucléaires, que je prie de trouver ici l'expression de ma sincère reconnaissance.

Je n'oublie pas non plus les nombreuses et profitables discussions avec M. P. GRATREAU que je remercie pour son amicale sollicitude.

Je tiens à exprimer ma très profonde reconnaissance à M. le Professeur L. LE MOIGNE. Après avoir été il y a déjà bien des années, mon professeur, il n'a cessé de me guider dans la voie scientifique et de me donner ses conseils et son appui. Si j'ai pu mener à bien le présent travail, c'est, indirectement, beaucoup à lui que je le dois.

Je tiens à faire connaître ici ma profonde, parfaite et éternelle reconnaissance à mon père et à ma mère qui, depuis toujours, ont consenti à d'innombrables sacrifices et enduré maintes privations, dans l'espoir de me voir devenir un jour un HOMME.

Étude de la topographie du champ magnétique et optique des trajectoires de sortie des particules dans un accélérateur FFAF du type Ohkawa

INTRODUCTION

Lors d'une collision frontale de deux particules identiques se déplaçant à des vitesses égales, l'énergie relative de ces deux particules qui est, dans le cas classique, égale à la somme des énergies, devient supérieure à cette somme au fur et à mesure que nous considérons des particules de plus en plus relativistes. La valeur du rapport de l'énergie relative totale, à l'énergie au repos, que l'on désigne par γ , lors du choc de front de deux particules identiques correspondant chacune à une énergie γ_0 , s'exprime par :

$$\gamma = 2\gamma_0^2 - 1$$

Il est possible ainsi d'obtenir des énergies très élevées en envoyant des particules les unes contre les autres, ce qui réduit considérablement l'énergie de translation prise par le centre de masse lors d'un choc contre une cible fixe dans le laboratoire. Toutefois, un tel procédé n'était pas utilisable tant que les intensités des faisceaux fournis par les accélérateurs restaient faibles, et ne pouvaient par là assurer des sections efficaces d'interaction suffisamment élevées pour rendre observables de tels phénomènes. L'utilisation de la focalisation forte dans les accélérateurs, obtenue grâce aux champs à gradients alternés, a permis de vaincre cette difficulté et d'assurer des faisceaux assez intenses pour réaliser de telles expériences. Cette méthode de production d'énergies élevées obtenues par l'utilisation de faisceaux croisés est particulièrement intéressante pour les électrons. En effet à cause des pertes par rayonnement il est pratiquement impossible de dépasser lors de leur accélération une énergie de l'ordre du GeV (10^9 eV). Il suffit de produire l'interaction d'électrons de 100 MeV en croisant les faisceaux

les contenant, pour obtenir des énergies d'approche équivalentes à celles qui seraient produites par le choc d'électrons de 40 GeV contre une cible fixe.

Pour obtenir de tels chocs entre particules, le procédé le plus simple consiste à injecter successivement, grâce à un dispositif d'aiguillage convenable, des électrons provenant d'un accélérateur classique quelconque, dans deux aimants annulaires, dits anneaux de stockage, présentant deux points d'intersection (pouvant d'ailleurs être confondus) où se produiront les collisions. Un des principaux avantages à utiliser un système ayant deux points d'intersection distincts réside dans le fait que ces points peuvent alors être situés dans des sections droites, dépourvues de tout champ magnétique, ce qui rend immédiate l'interprétation des directions de recul lors de collisions. Il n'en est plus de même lorsque les collisions ont lieu en dehors de ces sections droites : les trajectoires sont alors déviées par le champ magnétique dont il faut tenir compte lors de l'interprétation des directions de sortie observées.

Un dispositif d'une tout autre conception a été proposé par T. Ohkawa (référence : 1). Il consiste en un accélérateur à champ constant et gradient alterné, dit type FFAG, qui permet, grâce à l'inversion du sens du champ magnétique dans les secteurs successifs, la circulation ainsi que l'accélération simultanée de deux faisceaux en sens inverses et assure deux intersections par période azimutale.

L'intérêt de ce dispositif élégant réside dans la possibilité, qu'il offre à lui seul, d'accélérer et de stocker des particules, évitant ainsi le délicat problème du transfert de celles-ci d'un accélérateur classique à des anneaux de stockage séparés. Toutefois, par suite des inversions du sens du champ magnétique, le dispositif a des dimensions nettement supérieures à ce qu'elles auraient été dans le cas d'un champ à direction unique. L'introduction de sections droites à champ nul, qui permettraient l'analyse directe des directions de sortie, s'avère difficile à réaliser en pratique. Les particules provenant des interactions aux points d'intersection des orbites d'équilibre doivent donc sortir à travers le champ compliqué de l'accélérateur FFAG avant d'atteindre les dispositifs de détection. Il devient donc nécessaire, dès lors, d'étudier soigneusement l'optique de sortie des trajectoires des particules secondaires d'un tel accélérateur, avant de pouvoir en définir les performances.

La théorie des accélérateurs FFAG du type Ohkawa a été traitée par T. Ohkawa lui-même (référence : 2). Plusieurs études ont été entreprises à leur sujet, notamment par le groupe Midwestern Universities Research Association (MURA) (références : 3-9), l'Organisation européenne pour la Recherche Nucléaire (CERN) (références : 10-13), ainsi que par l'Institut de Physique Lebedev (références : 14, 15). Toutes ces études traitent uniquement de la stabilité des orbites des méthodes d'accélération et sont avant tout centrées sur le double problème de l'accélération et du stockage. Le groupe MURA a même réalisé un accélérateur de ce type pour électrons de 40 MeV dont le montage est en cours de finition (références : 6-9). Aucune étude n'ayant été faite sur les trajectoires de sortie de tels accélérateurs, il nous a semblé intéressant d'entreprendre un tel travail dont les résultats conditionnent en partie l'utilisation de ces appareils-là.

D'autre part il nous a semblé utile de définir avec précision (dans tout l'espace) pour les accélérateurs les trois paramètres magnétiques : champ de l'induction magnétique $\vec{B}$ et champs des potentiels vecteur $\vec{A}$ et scalaire U . Les expressions de $\vec{B}$, U et $\vec{A}$ sont généralement données sous forme de développement limité au voisinage du rayon d'équilibre d'accélérateurs à indice constant, et les solutions présentées sous forme de suites infinies définies par des formules de récurrence. Dans le présent travail, nous donnons les solutions valables dans tout l'espace et pour toute valeur constante de l'indice et de périodicité azimutale quelconque. Nous donnons $\vec{A}$, U et $\vec{B}$ sous forme d'expressions analytiques dont nous avons étudié les convergences. Nous avons montré d'autre part que lorsque l'indice du champ avait une valeur entière les solutions se réduisent à des formes analytiques simples évitant ainsi les solutions en suites infinies.

Nous avons par ailleurs considéré brièvement la forme des équipotentielles définissant les pièces polaires créant un champ à indice constant, ainsi que leur raccordement avec celles donnant un indice constant du champ de fuites de l'aimant de valeur distincte.

Pour aborder cette étude, nous avons été conduit à définir les systèmes de coordonnées pour lesquels les trois champs dérivent d'un champ scalaire dont nous donnons l'équation de définition. Cela permet d'éviter lors de la détermination de $\vec{A}$, le recours à l'équation vectorielle $\text{rot rot } \vec{A} = 0$ et d'assurer la définition simultanée de U et $\vec{A}$.

En tenant compte des simplifications ainsi apportées, nous avons défini, dans tout l'espace, les trois paramètres magnétiques créant dans un plan particulier un champ magnétique compatible avec les restrictions qui lui sont imposées dans le domaine des accélérateurs : la forme du champ dans ce plan constitue nos conditions aux limites, et nous permet de définir d'une façon unique le champ dans tout l'espace. Les restrictions imposées pour les champs magnétiques utilisés dans les accélérateurs, comme nous le verrons, peuvent être résumées comme suit : champ magnétique présentant une périodicité azimutale et une variation radiale proportionnelle à une puissance du rayon (r^n). Un tel champ est dit champ à indice constant, l'indice étant ($-n$).

En dehors de l'étude théorique de ce problème, nous avons étudié le cas particulier d'un accélérateur du type Ohkawa pour électrons de 90 MeV, dont les paramètres principaux ont fait l'objet de plusieurs études au CERN (références: 10-13), en vue d'étudier la possibilité de réaliser un accélérateur plus puissant que celui du groupe MURA.

Le présent travail peut être subdivisé en deux parties : la première, comprenant les trois premiers chapitres, est consacrée aux considérations sur les simplifications pouvant être apportées à la définition de la topographie magnétique, et à la recherche de formes analytiques dans certains cas particuliers (indice du champ constant) dont nous rappelons l'intérêt pratique dans le cas des accélérateurs. Dans la deuxième partie nous posons les équations du mouvement en adoptant la topographie magnétique telle qu'elle a été définie dans la première partie, et après leur résolution numérique, dont nous décrivons les grandes lignes, nous discuterons les résultats obtenus concernant l'optique de sortie des trajectoires de l'accélérateur étudié.

Nous avons cherché à définir par le présent travail l'allure des trajectoires sortantes et les propriétés générales de l'accélérateur, sans tenir compte des fluctuations locales dans la valeur des différents paramètres.

PREMIÈRE PARTIE

CHAPITRE I

1. Considérations sur les simplifications pouvant être apportées au calcul du potentiel vecteur $\vec{A}$

Avant d'aborder l'étude de l'accélérateur qui constitue le sujet du présent travail, nous avons été conduit à préciser certaines questions se rapportant à la topographie des champs magnétiques et à leur détermination. Deux raisons bien précises nous y ont conduit. La première est que pour l'étude de notre accélérateur le champ magnétique n'étant défini que dans le plan (P) d'accélération, il nous faut reconstituer sa topographie dans tout l'espace afin de pouvoir étudier les trajectoires autres que celles de ce plan. La seconde est liée au fait que l'équation à laquelle doit satisfaire le potentiel vecteur A dont dérive le champ magnétostatique :

$$\text{rot rot } \vec{A} = 0$$

qui s'écrit, si nous posons $\text{div } \vec{A} = 0$, sous la forme symbolique :

$$\nabla^2 \vec{A} = 0 \quad ,$$

n'est équivalente aux trois équations de Laplace :

$$\Delta A_i = 0 \quad i = 1, 2, 3$$

que dans les cas des coordonnées cartésiennes (Les A_i sont les trois composantes du vecteur $\vec{A}$ prises sur le système orthonormé direct considéré).

La séparation des variables A_i dans le cas général n'étant pas possible, nous avons étudié quelques simplifications pouvant être apportées au calcul de $\vec{A}$.

La définition du mouvement d'une particule chargée se déplaçant dans un champ magnétique ne nécessite la connaissance que du vecteur induction

$\vec{B}$, en tout point de l'espace. Pour la définition toutefois des surfaces de pièces polaires, ou d'un invariant du mouvement, il est utile de connaître respectivement les potentiels scalaires U et vecteur $\vec{A}$. Il est à remarquer que le présent calcul n'est utile que si nous cherchons la solution définissant $\vec{A}$ en tout point de l'espace.

Dans le vide et pour un champ magnétostatique nous avons, pour définir les trois quantités $\vec{B}$, U et $\vec{A}$, les relations :

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= 0\end{aligned}\tag{1.1}$$

qui définissent complètement le champ du vecteur $\vec{B}$, compte tenu des conditions aux limites. Ces relations (1.1) montrent que $\vec{B}$ peut être défini comme le rotationnel d'un vecteur ($\vec{A}$), et comme le gradient d'un scalaire (U):

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \operatorname{rot} \vec{A} \\ \vec{B} &= -\operatorname{grad} U\end{aligned}\tag{1.2}$$

Les relations (1.2) et (1.1) conduisent à :

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = 0\tag{1.3a}$$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} U = 0 \quad ,\tag{1.3b}$$

équations aux dérivées partielles du deuxième ordre dont $\vec{A}$ et U sont solutions.

Dans le cas de calculs ne nécessitant la connaissance que de $\vec{B}$ et de U , on peut se borner à la résolution de l'équation de Laplace (1.3b).

Si toutefois la connaissance de $\vec{A}$ est utile, nous chercherons à éviter de résoudre directement l'équation (1.3a), calcul ardu qui conduit à résoudre simultanément trois équations aux dérivées partielles du deuxième ordre (elles peuvent être réduites à deux du fait que $\vec{A}$, étant défini par son rotationnel, n'est connu qu'à un gradient près). Un cas simple est celui où l'une de ces trois équations ne comporte explicitement qu'une seule des trois composantes de $\vec{A}$. L'équation pourra donc être identiquement satis-

faite en posant cette composante de $\vec{A}$ identiquement nulle. Les coordonnées cartésiennes et cylindriques, par exemple, présentent cette particularité.

Nous chercherons donc à définir les cas où $\vec{A}$ peut être rattaché à une seule fonction scalaire qui soit solution d'une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre.

Si nous posons :

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0$$

nous pouvons rattacher $\vec{A}$ au champ du vecteur de Hertz $\vec{\pi}$ par :

$$\vec{A} = \operatorname{rot} \vec{\pi}.$$

Cette restriction sur $\vec{A}$ est justifiable car, comme nous l'avons précisé déjà, $\vec{A}$ n'est défini qu'à un gradient près. Comme par ailleurs :

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{\pi}$$

nous aurons :

$$U = -\operatorname{div} \vec{\pi}$$

en posant :

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{\pi} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\pi} = 0 \quad (1.4)$$

Cette équation en $\vec{\pi}$ n'est pas à priori plus simple que celle définissant $\vec{A}$, quant à sa résolution. Néanmoins, pour un certain groupe de systèmes de coordonnées, nous pourrions satisfaire à cette équation en ne retenant de $\vec{\pi}$ qu'une seule de ses composantes :

$$\vec{\pi}_1 = \vec{u}_1(\vec{u}_1 \cdot \vec{\pi}) \text{ avec } \vec{u}_1^2 = 1, \text{ et en posant } \vec{\pi}_2 = \vec{\pi}_3 = 0, \text{ où } \vec{\pi} = \sum_{i=1}^3 \vec{\pi}_i.$$

En effet, cherchons pour quelle famille de systèmes de coordonnées orthogonales ($q_1; q_2; q_3$) dont l'élément de longueur « ds » est défini par :

$$ds^2 = \sum_{i=1}^3 (h_i dq_i)^2$$

l'équation (1.4) peut être satisfaite identiquement par :

$$\vec{\pi} = \vec{u}_1 \pi \quad (1.5)$$

($\vec{u}_1$ est le vecteur unitaire associé en chaque point au déplacement dq_1 en ce point.)

En introduisant (1.5) dans (1.4) et en explicitant le calcul en coordonnées généralisées nous voyons, que pour les systèmes de coordonnées tels que :

$$\begin{aligned} h_1 &= 1 \\ h_2 &= h_2(q_2; q_3) \\ h_3 &= h_3(q_2; q_3) \end{aligned} \tag{1.6}$$

l'équation (1.5) est identiquement satisfaite si π est la solution de l'équation de Laplace.

Nous aurons en définitive :

$$\begin{aligned} \Delta\pi &= 0 \\ \vec{A} &= \text{rot } (\vec{u}_1\pi) \\ U &= -\text{div } (\vec{u}_1\pi) \\ \vec{B} &= -\text{grad } U \end{aligned}$$

c'est-à-dire que nous pourrions connaître $\vec{A}$, en même temps que U et $\vec{B}$, en résolvant une seule équation de Laplace, et en dérivant respectivement d'une façon appropriée.

Géométriquement un ensemble de systèmes de coordonnées satisfaisant aux conditions (1.6) admet un champ de vecteurs $\vec{u}_1$ parallèle à une direction fixe, et des déplacements élémentaires (dq_2 ; dq_3) dans des plans qui lui sont normaux. Font partie de cet ensemble, outre les coordonnées cartésiennes et cylindriques polaires, toutes les coordonnées proprement cylindriques dont les éléments sont pris parallèles à $\vec{u}_1$ et dont la définition dans un plan normal à $\vec{u}_1$ se fait à l'aide de coordonnées orthogonales planes quelconques; par exemple : elliptiques, paraboliques, biaxiales, etc.

Tout en admettant une suite importante de systèmes de coordonnées, les conditions (1.6) restent néanmoins par trop restrictives et inutilisables dans un grand nombre de cas, ce qui nous a conduit à chercher une autre fonction génératrice pour $\vec{A}$.

Nous proposons pour cela de rattacher $\vec{B}$, U et $\vec{A}$, non plus à un champ de vecteurs, mais à un champ scalaire W , de façon à satisfaire aux conditions (1.1).

Posons :

$$U = h_1 \vec{u}_1 \cdot \text{grad } W$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \vec{B} &= -\text{grad } U \\ &= \text{rot } (h_1 \vec{u}_1 \wedge \text{grad } W) - \vec{V} \end{aligned}$$

où

$$\vec{V} = \text{rot } (h_1 \vec{u}_1 \wedge \text{grad } W) + \text{grad } (h_1 \vec{u}_1 \cdot \text{grad } W)$$

Il suffira que $\vec{V}$ soit nul pour que nous puissions poser :

$$\vec{A} = h_1 \vec{u}_1 \wedge \text{grad } W$$

et que les conditions (1.1) soient identiquement satisfaites. Or

$$\vec{V} = \begin{cases} h_1 \Delta W - \frac{h_1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial W}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3 / h_1) \\ - \frac{h_2}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial W}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial}{\partial q_1} (h_3 h_1 / h_2) \\ - \frac{h_3}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial W}{\partial q_3} \cdot \frac{\partial}{\partial q_1} (h_1 h_2 / h_3) \end{cases}$$

s'annule identiquement pour tout système de coordonnées tel que :

$$\begin{aligned} h_1 &= h_1(q_2 ; q_3) \\ h_2 &= f(q_1) g_2(q_2 ; q_3) \\ h_3 &= f(q_1) g_3(q_2 ; q_3) \end{aligned} \quad (1.7)$$

si W est solution de l'équation suivante :

$$\Delta W - \frac{2}{f h_1^2} \frac{\partial W}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial f}{\partial q_1} = 0 \quad .$$

Nous ramenons ainsi la recherche de $\vec{A}$ à la résolution d'une seule équation scalaire aux dérivées partielles du deuxième ordre, avec :

$$\Delta W - \frac{2}{fh_1^2} \frac{\partial W}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial f}{\partial q_1} = 0$$

$$\vec{A} = \vec{u}_1 h_1 \wedge \text{grad } W$$

$$U = \vec{u}_1 h_1 \cdot \text{grad } W$$

$$\vec{B} = -\text{grad } U$$

Tout système de coordonnées satisfaisant aux conditions (1.6) satisfait en même temps aux conditions (1.7); il est donc justifiable de l'un des deux traitements indifféremment.

Considérons tout système de coordonnées orthogonales dont deux déplacements (dq_2, dq_3) en un point quelconque de l'espace définissent un plan passant toujours par une droite fixe de l'espace, et dont la troisième coordonnée $q_1 (= \phi)$ définit l'orientation du dit plan autour de cette droite considérée comme axe, c'est-à-dire que nous avons

$$dS^2 = ds^2(\text{plan}) + r^2(q_2; q_3) d\phi^2$$

Nous remarquons qu'un tel système est justifiable de ce traitement (exemple : coordonnées cylindriques, sphériques, toroïdales, elliptiques, paraboloidales, etc...) et présente en plus la particularité que W est une solution de l'équation de Laplace, car le $f(q_1) = 1$.

Nous tenons à rappeler ici le calcul fait par M. Durand (référence : 16) pour retrouver la fonction de Borgnis à partir d'une équation du troisième ordre, qu'il ramène à une équation du deuxième ordre pour $h_1 = 1$ et $h_2/h_3 = f(q_2; q_3)$ — calcul dont nous nous sommes inspiré pour faire cette étude.

Avant d'utiliser ces résultats pour la détermination de la topographie du champ magnétique dans l'espace, à partir des conditions aux limites que nous définirons dans un plan (P), nous nous proposons d'expliciter les restrictions que nous devons imposer au champ, afin d'assurer au cours de l'accélération la stabilité des orbites vis-à-vis des oscillations bétatroniques.

2. Caractéristiques imposées au champ magnétique par les considérations de stabilité des orbites d'équilibre vis-à-vis des oscillations bétatroniques

Lors de l'étude de la réalisation d'un accélérateur de particules, un des buts majeurs consiste à assurer, par un choix judicieux de la forme du champ magnétique, la stabilité des oscillations bétatroniques au cours de l'accélération. La première condition que nous allons imposer est donc cette stabilité. Elle est fondamentale car elle détermine le rendement de notre machine. Cette étude a déjà été effectuée par plusieurs auteurs (références : 2, 5, 12, 15). Nous en rappellerons néanmoins les principaux points et en déduirons la forme analytique optimum de $\vec{B}$ dans un plan (P) de l'espace, ce qui constituera la condition aux limites, et fixera d'une façon unique la topographie magnétique que nous devons réaliser dans tout l'espace.

Considérons pour cela une particule de masse au repos m_0 , de charge q , animée d'une quantité de mouvement $\vec{p}$ et se déplaçant dans un champ magnétique représenté par le vecteur de Hertz $\vec{\pi}$ dont il dérive. Toute trajectoire d'une telle particule doit satisfaire à l'équation de Jacobi qui pour le cas magnétostatique peut s'écrire sous la forme :

$$\delta \int (\vec{p} + q \text{ rot } \vec{\pi}) d\vec{s} = 0 \quad . \quad (2.1)$$

Par suite de la forme circulaire de l'accélérateur nous adoptons le système de coordonnées cylindriques (R, ϕ, Z) lié au trièdre orthonormé direct ($\vec{i}, \vec{m}, \vec{k}$) pour décrire le mouvement. (Nous aurons aussi l'occasion d'utiliser plus loin les coordonnées cylindriques normées (r, ϕ, z) déduites des précédentes en posant $r = R/R_0$; ϕ ; $z = Z/R_0$, où R_0 est la constante de normalisation et sera prise égale au rayon de l'accélérateur. Nous pré-

ciserons d'ailleurs sa définition au paragraphe 3.4). Nous avons déjà montré que pour de tels systèmes de référence nous pouvons poser :

$$\vec{\pi} = \vec{k} \pi$$

l'équation (2.1) devient alors :

$$\delta \int [\varepsilon p ds + q \operatorname{rot}(\vec{k} \pi) \cdot d\vec{s}] = 0 \quad (2.2)$$

où $\varepsilon = \pm 1$ suivant que $d\vec{s}$ est pris parallèle ou antiparallèle à $\vec{p}$.

Le champ magnétique sera supposé présenter une périodicité d'ordre N c'est-à-dire que :

$$\pi(N\phi + 2\pi) = \pi(N\phi) \quad .$$

Nous appellerons trajectoire ou orbite d'équilibre toute trajectoire solution de cette équation de Jacobi et satisfaisant aux conditions :

$$\begin{pmatrix} Q_i(N\phi) \\ P_i(N\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_i(N\phi + 2\pi) \\ P_i(N\phi + 2\pi) \end{pmatrix} \quad ,$$

où Q_i et P_i sont les coordonnées canoniques du mouvement. Nous appellerons H et L les fonctions hamiltonienne et lagrangienne qui leur correspondent.

Etudions la stabilité de telles trajectoires et considérons pour cela les équations des petits mouvements autour de ces trajectoires d'équilibre. Soit la trajectoire d'équilibre définie par les coordonnées canoniques $\{\bar{Q}_i(\phi), \bar{P}_i(\phi)\}$ et les petits mouvements par les coordonnées, toujours canoniques :

$$\{q_i(\phi) = Q_i(\phi) - \bar{Q}_i(\phi) ; p_i(\phi) = P_i(\phi) - \bar{P}_i(\phi)\} \quad .$$

Les fonctions hamiltoniennes et lagrangiennes correspondant à ces deux systèmes de coordonnées canoniques seront notées respectivement par $\bar{H}$ et $\bar{L}$, et $\mathcal{H}$ et $\mathcal{L}$.

Le principe de moindre action montre que pour un même mouvement, les Lagrangiens, exprimés en divers systèmes de coordonnées, ne diffèrent que par la dérivée totale par rapport à la variable indépendante (ϕ) d'une fonction quelconque F , dite fonction de transformation. Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
L(p_i, q_i, \phi) &= L(P_i, Q_i; \phi) - \frac{dF}{d\phi} \\
&= \sum p_i \frac{dq_i}{d\phi} - \mathcal{H} = \sum P_i \frac{dQ_i}{d\phi} - H - \frac{dF}{d\phi}
\end{aligned}$$

d'où :

$$\mathcal{H}(p_i, q_i, \phi) = H - \sum P_i \frac{dQ_i}{d\phi} + \sum p_i \frac{dq_i}{d\phi} + \frac{dF}{d\phi}.$$

En développant $H(P_i, Q_i, \phi)$ autour de la trajectoire d'équilibre nous trouvons :

$$\begin{aligned}
H(P_i, Q_i, \phi) &= \bar{H}(\bar{P}_i, \bar{Q}_i, \phi) + \sum q_i \left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{Q}_i} \right) + \sum p_i \left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{P}_i} \right) + \dots \\
&= \bar{H} - \sum q_i \frac{d\bar{P}_i}{d\phi} + \sum p_i \frac{d\bar{Q}_i}{d\phi} + \dots
\end{aligned}$$

et en portant cette expression dans celle de $\mathcal{H}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \left(\bar{H} - \sum \bar{P}_i \frac{d\bar{Q}_i}{d\phi} \right) - \frac{d}{d\phi} (F - \sum q_i \bar{P}_i) \\
&\quad + \text{Forme quadratique en } p_i \text{ et } q_i \\
&\quad + \text{Termes d'ordre supérieur au 2° degré.}
\end{aligned}$$

En choisissant la fonction arbitraire :

$$F = \sum q_i \bar{P}_i + f(\phi)$$

et en ne retenant que les termes du 2° ordre au plus, en p_i et q_i , il ne nous reste que la forme quadratique en p_i et q_i , les termes contenus dans la première parenthèse ne comportant explicitement que ϕ , n'interviennent pas dans les équations du mouvement. Ces dernières peuvent donc se mettre sous la forme :

$$\begin{vmatrix} \frac{dp_i}{d\phi} \\ \frac{dq_i}{d\phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \end{vmatrix} = [M(\bar{Q}_i; \bar{P}_i; \phi)] \begin{pmatrix} p_i \\ q_i \end{pmatrix},$$

où la matrice $(M(\overline{Q}_i, \overline{P}_i, \phi))$ n'est autre que :

$$[M(\phi)] = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \overline{H}}{\partial \overline{P}_i^2} & \frac{\partial^2 \overline{H}}{\partial \overline{P}_i \partial \overline{Q}_i} \\ \frac{\partial^2 \overline{H}}{\partial \overline{P}_i \partial \overline{Q}_i} & \frac{\partial^2 \overline{H}}{\partial \overline{Q}_i^2} \end{vmatrix} .$$

C'est donc un système d'équations linéaires du premier ordre à coefficients périodiques en $N\phi$. De telles équations sont dites équations de Floquet (voir par exemple référence : 17) et leur solution est :

$$\begin{pmatrix} q_j \\ p_j \end{pmatrix} = \sum_m \begin{pmatrix} A_{mj}(N\phi) \\ B_{mj}(N\phi) \end{pmatrix} \exp(i v_m \phi) ,$$

où les v_m sont les fréquences des oscillations bétatroniques. Cette appellation est due à l'analogie avec le cas limite où (M) tendant vers une matrice constante, les A_{mj} et B_{mj} tendent vers des valeurs constantes et les v_m sont les fréquences d'oscillation.

Il a été démontré (référence : 18) que pour avoir des oscillations stables il fallait éviter les résonances définies par :

$$\sum_1^J n_m v_m = nN$$

où les n sont des entiers, et N la périodicité angulaire du dispositif étudié. Nous présentons figure : 1 quelques lignes de résonance pour $J = 2$ (Pour plus de précisions voir référence : 18). Nous voyons que le nombre de ces résonances est élevé, et la probabilité d'en atteindre une, au cas où les fréquences varieraient avec l'énergie au cours de l'accélération, est grande. Dans le but d'éviter ces lignes de résonances et d'assurer ainsi la stabilité des petits mouvements autour de l'orbite d'équilibre, il suffit de centrer les fréquences en dehors des résonances tout en les rendant indépendantes de l'énergie tout au long de l'accélération. Cela assure la stabilité des orbites d'équilibre vis-à-vis des oscillations bétatroniques.

Cherchons à définir les conditions auxquelles doit satisfaire le champ magnétique pour assurer une telle constance de fréquences bétatroniques v_m . Adoptons pour cela un système de référence déduit du précédent en posant

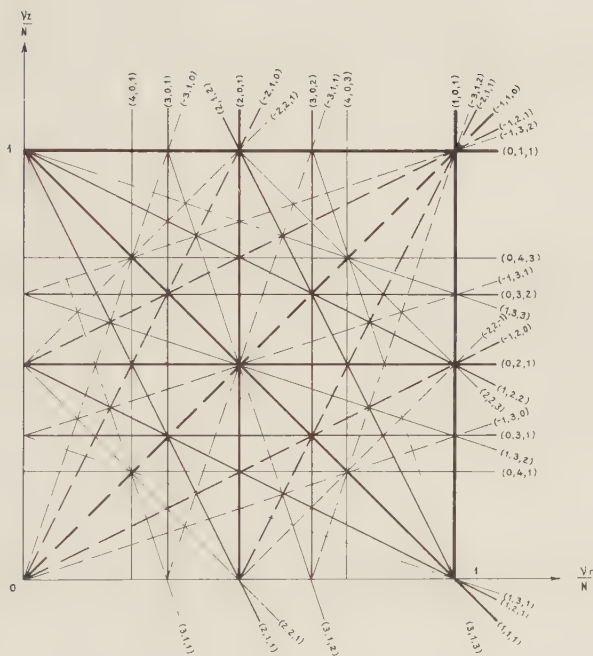


Fig. 1.

Lignes de résonance :

$$n_1 \frac{V_r}{N} + n_2 \frac{V_z}{N} = n_3$$

La triade entre parenthèses, placée près de chaque droite, définit l'ensemble (n_1, n_2, n_3) correspondant à la droite.

—————
- - - - -

Résonances dangereuses

Résonances non dangereuses

La grosseur du trait est proportionnelle à l'importance de la résonance.

($\rho; = R/\lambda\phi; \zeta = Z/\lambda$) et récrivons l'équation (2.2) dans le nouveau système; en posant $d\sigma = ds/\lambda$ nous aurons :

$$\delta \int [\lambda p d\sigma + q \operatorname{rot} \vec{k} \pi(\lambda\rho, \phi, \lambda\zeta) d\vec{\sigma}] = 0 \quad .$$

Nous voyons que si π est homogène en R et Z , et si $(n+2)$ est l'ordre de cette homogénéité, l'équation précédente devient après division par $\lambda\rho$, (tous deux étant indépendants du système de coordonnées) :

$$\delta \int \left\{ d\sigma + \frac{q}{p} \lambda^{n+1} \operatorname{rot} [\vec{k} \pi(\rho, \phi, \zeta)] \cdot d\vec{\sigma} \right\} = 0 \quad .$$

En prenant λ proportionnel à $(p/q)^{1/(n+1)}$ l'équation devient indépendante de l'énergie de la particule, c'est-à-dire que les trajectoires pour les différentes énergies sont toutes semblables, le rapport de leurs dimensions correspondantes étant égal au rapport de leurs λ ; l'origine des ϕ pour chaque orbite sera mesurée dans le cas général à partir de $\phi_0(p)$. De telles conditions assurent évidemment la constance des fréquences bétatroniques, et par là, la stabilité. Nous voyons facilement que n changé de signe n'est autre que l'indice de champ $\frac{-R\partial B}{B\partial R}$ dans le plan $Z = 0$.

Par ailleurs, si nous désirons obtenir des orbites d'équilibre planes dans le plan que nous définirons par $Z = 0$, nous devons avoir pour le vecteur de Hertz :

$$\pi(-Z) = \pi(Z) \quad ,$$

et si nous cherchons à avoir un accélérateur à secteurs radiaux nous devons avoir $\frac{\partial \phi_0}{\partial p} = 0$, ce qui rend les orbites d'équilibre homothétiques, de centre l'origine et de rapport λ .

L'ensemble de ces conditions se traduit pour l'induction magnétique dans le plan $Z = 0$ par :

$$\vec{B}_{(p)} = \vec{k} B_0 R^n f(N\phi) \quad .$$

Cette forme étant fixée par notre condition de stabilité, nous chercherons à présent à définir à partir de cette condition aux limites la topographie magnétique pour tout l'espace.

3. Généralités sur la topographie du champ magnétique

La solution de l'équation de Laplace étant calculable de façon univoque dans tout l'espace si elle est connue dans un plan (P) : $Z = 0$, nous chercherons à définir la forme de l'induction magnétique dans ce plan. Nous avons vu que pour assurer la stabilité des oscillations bétatroniques au cours de l'accélération, $\vec{B}$ devait avoir dans l'espace d'accélération la forme :

$$\vec{B}_{(P)} = \vec{k} B_0 R^n f(N\phi)$$

où $f(N\phi)$ est périodique en $N\phi$ et peut donc être développé en série de Fourier. Comme $\vec{B}$ est une fonction harmonique, nous aurons les mêmes fréquences en ϕ à l'extérieur de la région d'accélération, qu'à l'intérieur. D'autre part, pour être physique, $\vec{B}$ doit avoir une décroissance à l'infini en au moins $1/R$, ce qui nécessitera une autre loi radiale du champ pour l'extérieur. Nous écrirons donc :

$$\vec{B}_{(P)} = \vec{k} B_0 h(R) \sum_{m=0}^{\infty} \cos m(N\phi + \phi_m) \quad , \quad (3.0)$$

et nous appellerons indice du champ la quantité $-n(R)$ définie par :

$$-n(R) = -\left(\frac{R}{B} \frac{\partial B}{\partial R} \right)_{(P)} = \frac{-R}{h(R)} \frac{dh(R)}{dR} \quad .$$

Cette quantité doit être constante à l'intérieur de l'espace d'accélération, mais pourra varier à l'extérieur.

Nous nous proposons, dans ce qui suit, de tirer à partir de l'expression (3.0) prise comme condition aux limites, la topographie du champ dans tout l'espace.

3.1. Cas général où l'indice du champ est variable

Le problème est donc le suivant : une induction B est telle, qu'en tout point d'un plan donné (P) de l'espace elle lui est normale, et qu'en utilisant des coordonnées cylindriques (r, ϕ, z) au trièdre orthonormé direct $(\vec{l}, \vec{m}, \vec{k})$ dont le plan $Z = 0$ est confondu avec le plan (P), l'expression de $\vec{B}_{(P)}$ est :

$$\vec{B}_{(P)} = \vec{k} h(r) \cos N\phi \quad . \quad (3.1)$$

Les résultats que nous obtiendrons pour ce cas particulier simple, nous permettront de traiter, grâce au principe de superposition (par suite de la linéarité des équations de Maxwell), le cas plus général défini par :

$$\vec{B}_{(P)} = \vec{k} \sum_N h_N(r) \cos (N\phi + \phi_N)$$

où les phases ϕ_N sont des constantes.

Nous avons déjà vu que le système de coordonnées cylindriques permettait de décrire le champ, dans toute sa généralité, à l'aide du vecteur de Hertz réduit à sa seule composante suivant $\vec{k}$. Celle-ci est la solution de l'équation de Laplace satisfaisant aux conditions aux limites que nous nous sommes imposées.

Nous définirons donc l'induction $\vec{B}$ ainsi que les potentiels scalaire U et vecteur $\vec{A}$ par le vecteur de Hertz $\vec{\pi}$ tel que :

$$\vec{\pi} = \vec{k} \pi$$

avec

$$\pi = \sum_N \pi_N$$

$$\Delta \pi_N = 0$$

et

$$\text{grad div } (\vec{k} \pi_N) = \vec{B}_{N(P)} = \vec{k} h_N(r) \cos (N\phi + \phi_N) \quad .$$

Nous en déduirons :

$$\begin{aligned}
\vec{A} &= \text{rot}(\vec{k}\pi) \\
U &= -\text{div}(\vec{k}\pi) = -\partial\pi/\partial z \\
\vec{B} &= -\text{grad } U
\end{aligned}
\tag{3.2}$$

C'est pour cela que nous bornerons notre calcul à la définition de π dont dérive l'induction $\vec{B}$ vérifiant la condition aux limites :

$$\vec{B}_{(P)} = \vec{k} h(r) \cos(N\phi),$$

quitte à reconstituer ensuite le spectre requis par superposition des solutions et en ajustant les phases d'une façon appropriée.

Posons alors :

$$\pi = r^2 h(r) \cos(N\phi) \sum_{J=0}^{\infty} R_J(r) \frac{(z/r)^{2J}}{(2J)!} \tag{3.3}$$

Cela donne pour $Z = 0$:

$$\vec{B}_{(P)} = \vec{k} h(r) R_1(r) \cos N\phi$$

et, pour satisfaire à la condition aux limites (3.1) nous devons prendre:

$$R_1(r) = 1$$

Nous posons pour tout ce qui suit :

$$n(r) = \frac{r}{h(r)} \frac{dh(r)}{dr},$$

c'est-à-dire que $n(r)$ n'est autre que l'indice du champ changé de signe. En effectuant une quadrature, nous avons immédiatement :

$$h(r) = \exp\left(\int_1^r \frac{n(x)dx}{x}\right).$$

Pour satisfaire à l'équation de Laplace $\Delta\pi = 0$, nous avons la formule de récurrence pour les $R_J(r)$:

$$R_{J+1}(r) = \left[N^2 - (n+2-2J)^2 - r \frac{dn}{dr} \right] R_J(r) - (2n+5-4J)r \frac{dR_J}{dr} - r^2 \frac{d^2 R_J}{dr^2} \tag{3.4}$$

avec $R_1(r) = 1$,

et en intégrant l'équation de récurrence (3.4) pour $J = 0$

$$R_0(r) = \frac{1}{r^2 h(r)} \left\{ C_1 r^\alpha + C_2 r^{2-\alpha} + r^\alpha \int r^{1-2\alpha} \left(\int h(r') r'^{\alpha-1} dr' \right) dr \right\}$$

avec C_1 et C_2 constantes d'intégration et α une constante définie en fonction de N par :

$$\alpha^2 - 2\alpha - N^2 = 0 \quad .$$

Connaissant π nous en tirons aisément $\vec{B}$, U et $\vec{A}$ en utilisant les relations (3.2).

3.2. Cas particulier de l'indice du champ constant.

Ce cas, nous venons de le montrer au chapitre précédent, est d'un intérêt pratique considérable du fait qu'il assure la stabilité des oscillations bétatroniques au cours de l'accélération.

Si n est constant $h(r)$ devient :

$$h(r) = r^n ,$$

tandis que la formule de récurrence (3.4) réduit les $R_J(r)$ à des constantes.

En considérant l'expression (3.3) qui donne π , nous voyons que la série $\sum_{J=0}^{\infty} R_J(r) \frac{(z/r)^{2J}}{(2J)!}$ se réduit à une fonction de z^2/r^2 que nous appellerons $\sigma(z^2/r^2)$. L'expression (3.3) de π devient alors, en tenant compte des simplifications que nous venons d'énumérer :

$$\pi = r^{n+2} \sigma(z^2/r^2) \cos(N\phi) .$$

Si nous posons $x = -z^2/r^2$, l'équation de Laplace $\Delta\pi = 0$ se réduit à :

$$x(1-x) \frac{d^2\sigma}{dx^2} + \left[\frac{1}{2} + (n+1)x \right] \frac{d\sigma}{dx} + \frac{N^2 - (n+2)^2}{4} \sigma = 0 \quad ,$$

dont les solutions ne sont autres que les fonctions hypergéométriques de Gauss (voir par exemple référence : 19). Nous pouvons écrire :

$$\sigma = F_1 \left(-\frac{n+2-N}{2}, -\frac{n+2+N}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{z^2}{r^2} \right)$$

et en tenant compte des relations d'identité de ces fonctions nous avons en particulier :

$$\sigma \equiv \left(1 + \frac{z^2}{r^2}\right)^{\frac{n+2+N}{2}} F_2\left(-\frac{n+2+N}{2}, \frac{n+3-N}{2}; \frac{1}{2}; \frac{z^2}{r^2+z^2}\right).$$

Pour $N > 0$ la fonction F_2 est définie convergente et bornée en tout point de l'espace (l'origine $r = z = 0$ étant exclue), si $N = 0$ la convergence de F_2 n'a plus lieu sur l'axe des z . Quant à σ il reste défini en tout point de l'espace sans pour cela être nécessairement borné sur l'axe des z : en effet, pour $n+2+N > 0$, $\sigma(r \rightarrow 0) \rightarrow \infty$.

Nous pouvons donc décrire la topographie du champ dans tout l'espace (l'axe des z excepté) par un π défini à l'aide de la fonction F_2 .

Nous remarquons que pour certaines valeurs des paramètres N (qui est essentiellement un entier non négatif) et n , les fonctions définissant la topographie du champ ont des solutions analytiques exactes, ce qui permet d'éviter les suites infinies. De telles simplifications étant d'un intérêt considérable lors d'évaluations numériques, nous allons préciser les valeurs de n et N qui y conduisent et définir les fonctions qui en résultent.

En dehors de ces réductions le recours à la fonction F_2 est amplement suffisant. En ce qui concerne les calculs que nous aborderons au cours de l'étude de l'accélérateur, nous nous bornerons à utiliser l'expression de π définie par la fonction hypergéométrique F_1 chaque fois que la valeur du n considéré rend impossible le recours à des expressions exactes. Cette attitude a été dictée par le fait que, d'une part, dans nos calculs la valeur numérique de z/r est telle que $|z/r| \leq 1$, ce qui assure une convergence rapide de F_1 dans la partie de l'espace qui nous intéresse, et que d'autre part la programmation de F_1 est plus simple et plus économique au point de vue temps de machine pour le calcul, que celle de F_2 .

3.2.1. Recherche de solutions exactes pour la définition de la topographie du champ magnétique dans l'espace

Considérons les résultats obtenus dans le paragraphe précédent : nous savons que la fonction hypergéométrique de Gauss définie par F_2 se réduit à une suite limitée de termes dans le cas où au moins l'une des deux quantités :

$$a = -\frac{n+2+N}{2} \quad ; \quad b = \frac{n+3-N}{2}$$

a une valeur entière négative, c'est-à-dire que (N étant essentiellement un entier non négatif) n est un entier tel que :

$(n+N)$ est pair et que $n \geq -N-2$, ou encore

$(n+N)$ est impair et que $n \leq N-3$.

Pour toutes ces valeurs particulières de n l'expression de π définissant la topographie du champ magnétique possède, tout en satisfaisant aux conditions aux limites imposées, des solutions exactes. En dehors de ces valeurs, π reste une suite infinie. C'est pour cette raison que nous proposons d'abandonner la fonction π et de chercher si, pour une représentation autre que cylindrique, nous obtiendrons encore des solutions exactes qui seront susceptibles de compléter notre spectre de valeurs de n entraînant des solutions analytiques exactes. Nous proposons une étude en coordonnées sphériques. Dans ce cas, comme nous l'avons montré au chapitre I, nous devrons rattacher $\vec{B}$, U et $\vec{A}$ au champ scalaire W dont nous chercherons la solution sous la forme :

$$W = \sin(N\phi) \rho^{n+1} f(\theta) \quad (\text{avec } q_1 = \phi)$$

en choisissant $f(\theta)$ tel que :

$$f(\theta = \pi/2) = 0$$

$$f'_\theta(\theta = \pi/2) = 1$$

pour satisfaire aux conditions aux limites.

L'équation de Laplace, dont W est la solution, se réduit à :

$$f'' + \cotg(\theta) f' + [(n+1)(n+2) - N^2/\sin^2\theta] f = 0$$

qui, pour n entier (N étant essentiellement un entier non négatif) n'est autre que l'équation définissant les polynômes de Legendre associés (voir par exemple référence : 20). Si n n'est pas entier, nous retrouverons aisément les fonctions hypergéométriques en posant :

$$f = v \sin^N \theta \quad \text{et} \quad x = \frac{1 - \cos \theta}{2}$$

ce qui donne :

$$x(x-1)v'' + (2x-1)(N+1)v' + (N-n-1)(N+n+2)v = 0,$$

d'où :

$$\begin{aligned} v_1 &= F(N-n-1, N+n+2; N+1; \sin^2(\theta/2)) \\ &= \cos^{-2N}(\theta/2) F(-1-n, n+2; N+1; \sin^2(\theta/2)) \end{aligned}$$

solution convergente pour $|\theta| < \pi$.

3.2.2. La valeur de l'indice du champ appartient à l'ensemble des nombres entiers: n est entier

Des calculs précédents nous pouvons ainsi conclure que si n a une valeur appartenant à l'ensemble des entiers, nous pouvons définir la topographie magnétostatique d'une façon exacte à l'aide de π ou de W , suivant la valeur de n , et en déduire $\vec{B}$, U et $\vec{A}$ en utilisant les relations :

$$\begin{cases} \vec{A} = \text{rot}(\vec{k}\pi) \\ U = -\text{div}(\vec{k}\pi) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \vec{A} = r \sin \theta \quad \vec{m} \wedge \text{grad } W \\ U = r \sin \theta \quad \vec{m} \cdot \text{grad } W \end{cases}$$

et

$$\vec{B} = -\text{grad } U$$

suivant que nous prenons les solutions en coordonnées cylindriques ou sphériques respectivement. Ces solutions exactes sont valables dans tout l'espace.

Nous pouvons schématiser ces résultats par le tableau suivant :

1. $n+N = \text{pair}$

$$\text{a) } n \geq -N-2 \quad \pi = \cos(N\phi) r^{n+2} \sum_0^K A_J(z/r)^{2J}$$

$$\text{b) } n \leq -2 \quad W = \sin(N\phi) \rho^{n+1} Q_{|n|-2}^N(\cos \theta)$$

pour $n \geq N$ nous pouvons aussi prendre

$$W = \sin(N\phi) \rho^{n+1} P_{n+1}^N(\cos \theta)$$

2. $n + N = \text{impair}$

$$\text{a) } n \geq -1 \quad W = \sin(N\phi) \rho^{n+1} Q_{n+1}^N(\cos \theta)$$

$$\text{b) } n \leq N-3 \quad \pi = \cos(N\phi) r^{n+2} \left(1 + \frac{z^2}{r^2}\right)^{n+5/2} \sum_0^H B_J(z/r)^{2J}$$

et pour $n \leq -N-2$ nous pouvons aussi prendre

$$W = \sin(N\phi) \rho^{n+1} P_{|n|-2}^N(\cos \theta)$$

avec :

$$K = \begin{cases} K' = \frac{n+2-N}{2} & \text{si } n \geq N-2 \\ K'' = \frac{n+2+N}{2} & \text{si } -N-2 \leq n < N-2 \end{cases}$$

$$H = \begin{cases} H' = \frac{N-n-3}{2} & \text{si } -N-3 < n \leq N-3 \\ H'' = \frac{N+n+3}{2} & \text{si } n \leq -N-3 \end{cases}$$

$$A_J = \frac{\left(\frac{N-n-2}{2}\right)_J \left(\frac{-N-n-2}{2}\right)_J}{J! \left(\frac{1}{2}\right)_J}$$

et

$$B_J = \frac{\left(\frac{n+3-N}{2}\right)_J \left(\frac{n+3+N}{2}\right)_J}{J! \left(\frac{1}{2}\right)_J}$$

où nous définissons l'opérateur $(\)_J$ agissant sur un nombre v quelconque par :

$$(v)_J = \frac{\Gamma(J+v)}{\Gamma(v)}$$

Nous rappelons ici pour mémoire que :

$$\begin{aligned}
 F(a, b ; c ; x) &\equiv (1-x)^{c-a-b} F(c-a, c-b ; c ; x) \\
 &\equiv (1-x)^{-a} F\left(a, c-b ; c ; \frac{x}{x-1}\right) .
 \end{aligned}$$

3.2.3. n différent d'un entier

Au cas où n a une valeur non entière, la solution se présente sous forme de série définie par la fonction hypergéométrique de Gauss :

$$\pi = r^{n+2} \cos(N\phi) \left(1 + \frac{z^2}{r^2}\right)^{\frac{n+2+N}{2}} F_2\left(-\frac{n+2+N}{2}, \frac{n+3-N}{2} ; \frac{1}{2} ; \frac{z^2}{r^2+z^2}\right)$$

valable dans tout l'espace. Pour l'évaluation numérique de F_2 nous chercherons à trouver une borne supérieure à l'erreur ε_J commise sur F_2 en ne retenant que les J premiers termes de la suite de F_2 . Nous avons :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_J(a, b ; c ; v) &= F_2(a, b ; c ; v) - \sum_{j=0}^J \frac{(a)_j (b)_j}{(c)_j} \frac{v^j}{j!} \\
 &= \frac{(a)_{J+1} (b)_{J+1}}{(c)_{J+1}} \frac{v^{J+1}}{(J+1)!} \left\{ 1 + \frac{(a+J+2)(b+J+2)}{(c+J+2)} \frac{v}{J+2} + \dots \right\}
 \end{aligned}$$

Si nous prenons J tel que :

$$J > \begin{cases} -(a+2) \\ -(b+2) \\ -(c+2) \end{cases}$$

comme $v = z^2/(r^2 + z^2) \geq 0$, nous pouvons écrire :

$$|\varepsilon_J(a, b ; c ; v)| \leq \frac{(a)_{J+1} (b)_{J+1}}{(c)_{J+1}} \frac{v^{J+1}}{(J+1)!} F(a+J+2, b+J+2 ; c+J+2 ; v) .$$

Considérons la représentation de la fonction hypergéométrique de Gauss par l'intégrale de Erdélyi; nous avons :

$$\begin{aligned}
 F(a', b' ; c' ; v) &\equiv \frac{\Gamma(c') \Gamma(c')}{\Gamma(a') \Gamma(b') \Gamma(c'-a') \Gamma(c'-b')} \times \\
 &\times \int_0^1 \int_0^1 t^{b'-1} s^{a'-1} (1-t)^{c'-b'-1} (1-s)^{c'-a'-1} (1-stv)^{-c'} ds dt \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

En prenant $M(v)$ tel que pour l'espace $0 \leq s, t \leq 1$ nous ayons :

$$|(1-stv)^{-c'}| \leq M^{-c'}$$

c'est-à-dire $M = 1$ si $c' \leq 0$

$$M = (1-v) \text{ si } c' > 0$$

Nous aurons en intégrant (3.5) :

$$|F(a', b' ; c' ; v)| \leq M^{-c'}$$

ce qui donne pour ε_J :

$$|\varepsilon_J(a, b ; c ; v)| \leq \frac{(a)_{J+1}(b)_{J+1}}{(c)_{J+1}} \frac{v^{J+1}}{(J+1)!} M^{-(c+J+2)}$$

et en fonction de n et N (en tenant compte que pour F_2 : $c = 1/2$ et $v = z^2/(r^2 + z^2)$) :

$$|\varepsilon_J| \leq \frac{\left(\frac{-n+2+N}{2}\right)_{J+1} \left(\frac{n+3-N}{2}\right)_{J+1} \left(\frac{z}{r}\right)^{2(J+1)} \left(\frac{z^2+r^2}{r^2}\right)^{3/2}}{\left(\frac{1}{2}\right)_{J+1}}$$

avec

$$J > \frac{n+N+6}{2}, \frac{N+1-n}{2}, 0$$

Cette expression nous permet de déterminer J de façon à ne commettre sur F_2 qu'une erreur compatible avec les tolérances imposées.

3.3. Définition des pièces polaires

Les lignes d'induction étant normales aux masses polaires dans le cas de la non saturation du fer, les surfaces délimitant ces masses polaires correspondent à des équipotentiellles :

$$U = -\text{div}(\vec{k}\pi) = -\partial\pi/\partial z = U_0 \cos(N\phi) r^n z \sigma (z^2/r^2) = \text{constante} . \quad (3.6)$$

Posons pour isoler la variation en ϕ :

$$u = \frac{U}{U_0 \cos N\phi} = r^n z \sigma \left(-\frac{n-N}{2}, -\frac{n+N}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{z^2}{r^2} \right)$$

où :

$$U_0 = B_0 R_0 / \mu_0 \text{ et } \mu_0 \text{ la perméabilité du vide } (4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}).$$

Une telle séparation des variables nous permet de n'étudier que l'aspect des courbes équipotentielles pour le plan défini par un $\phi_1 \neq \pi/2N$ et d'en déduire par simple transformation les équipotentielles correspondant à un autre plan défini par un angle ϕ quelconque. En effet, soient les courbes équipotentielles définies pour $\phi = 0$; u devient : $u_0 = U/U_0$ (où $U_0 = -B_0 R_0 / \mu_0$). Pour le plan $\phi \neq 0$ nous aurons à prendre la courbe du plan $\phi = 0$ correspondant à la valeur $u_\phi = u_0 / \cos(N\phi)$. Nous pouvons ainsi engendrer facilement dans l'espace la surface équipotentielle désirée si nous connaissons la famille des courbes de même u dans le plan $\phi = 0$.

Cherchons à nous faire une idée de l'ordre de grandeur de u_0 . Nous avons entre deux points (1) et (2) appartenant aux surfaces définissant les pièces polaires et délimitant l'entrefer :

$$NI = \int_{(1)}^{(2)} \vec{H} d\vec{l} = 2U$$

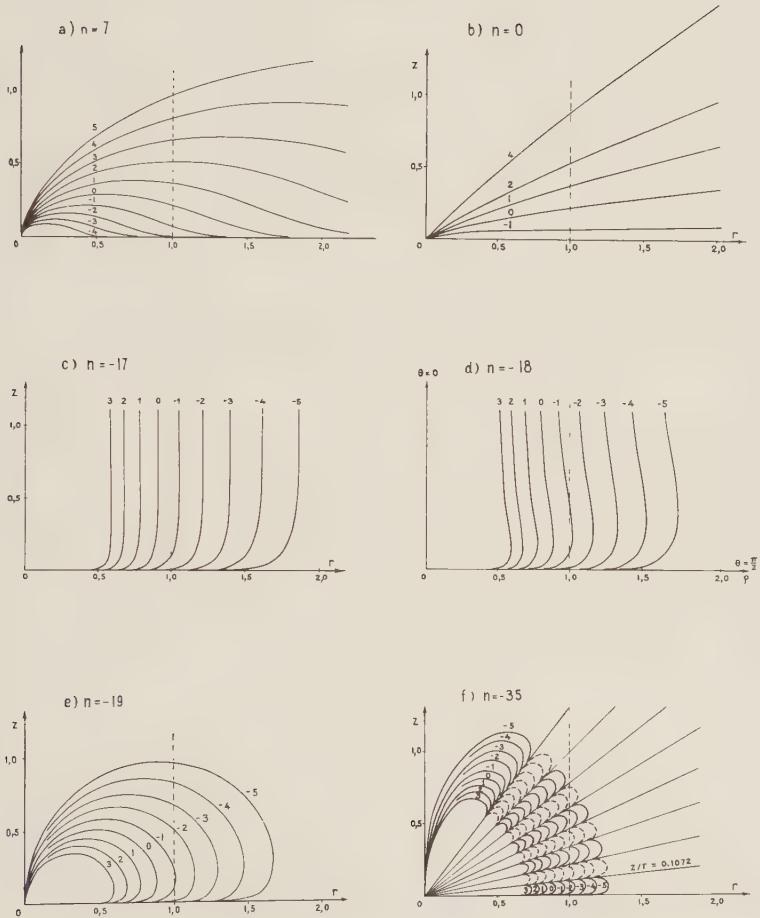
ce qui pour $B_0 = 1,2 \text{ W/m}^2$ à $R_0 = 2,775^m$ et $NI = 5,3 \cdot 10^4$ ampères-tours donne $u_0 = 0,01$.

A titre d'illustration nous donnons l'allure des courbes de même u pour $N = 16$ et $n = 7$; 0; -17; -18; -19; -35 successivement (voir Figure : 2 (a)-(f)).

Deux remarques s'imposent en ce qui concerne l'allure de ces courbes.

1. Pour $n \geq 0$ (et N positif) nous voyons que les courbes équipotentielles (traces des surfaces équipotentielles dans le plan $\phi = \pi/2N$) se rabattent sur l'axe des r lorsque $r \rightarrow 0$. Ce comportement devient évident lorsque nous nous souvenons que nous avons affaire à un champ à variation sinusoïdale azimutale, ce qui implique la présence de champs de signes contraires dans des secteurs correspondant à deux demi-périodes magnétiques voisines. Nous savons que pour un ventre de champ ($\phi = \pi/2N$) la variation azimutale est quasi nulle, en première approximation; et pour $r \gg 0$, la dimension transversale du secteur : $r\pi/2N$, est suffisamment grande pour que, l'effet « de bord » des secteurs voisins soit négligeable au centre du secteur que nous considérons. Par exemple, pour un indice nul ($n = 0$),

Fig. 2



Courbes équipotentielles dans le plan $\phi = 0$.

Périodicité azimutale : $M=16$

Indice de champ constant et unique ($-n$) :

a) $n = 7$ b) $n = 0$

c) $n = -17$ d) $n = -18$

e) $n = -19$ f) $n = -35$

Paramètre : $\log_{10} |u|$

nous aurons des droites parallèles à l'axe des r , ce que nous pouvons observer (figure: 2b) lorsque $r \rightarrow \infty$.

En revanche, au fur et à mesure que $r \rightarrow 0$, la dimension linéaire transversale du secteur diminue et tend vers zéro, d'où l'influence croissante des effets « de bord » due aux champs de signe contraire. Cet état de fait tend à diminuer de plus en plus le champ par rapport à la loi que nous pouvions imposer pour $r \gg 0$. Pour compenser la diminution du champ par l'effet « de bord » et conserver ainsi la valeur de l'indice de champ, les équipotentielles doivent de plus en plus se rapprocher du plan $Z = 0$ par rapport au cas du champ à symétrie de révolution, et cela d'autant plus rapidement que N est grand. Ce phénomène est mis en évidence pour $n = 7$ et $n = 0$ (Figure: 2a et b).

2. Nous remarquons que pour $n \geq -17$ ($N = 16$) les courbes équipotentielles dans un plan méridien sont uniformes, mais que pour $n < -17$ elles deviennent multiformes. En même temps, le domaine de définition par rapport à r , qui est infini pour les courbes à $u = \text{constante}$ et $n \geq -17$, devient fini pour celles à $n < -17$.

Cette propriété comme nous le verrons au paragraphe suivant, est importante du fait qu'en créant un champ d'un indice donné pour $r \leq 1$ et suivant la valeur de son intensité (valeur de u_0), le prolongement de la pièce polaire donnant pour $r < 1$ un indice de champ de fuites constant ($n \leq -N - 3$) peut s'avérer impossible. Cela est en effet important, car pour avoir dans un accélérateur la stabilité des oscillations bétatroniques ainsi qu'une focalisation forte ($N > 0$) au cours de l'accélération, n doit être tel que

$$n = \text{constante} \gg 0$$

c'est-à-dire que pour l'espace d'accélération ($r < 1$) le champ est radialement croissant. En dehors de cette région ($r > 1$), le champ, pour être physique, doit tendre vers zéro lorsque r augmente indéfiniment : cela implique une valeur négative de n . Nous voyons donc apparaître tout naturellement deux régions à indices différents, ce qui nous mène au problème de la définition des pièces polaires assurant une certaine variation pour $r < 1$ et leur raccordement à celles donnant pour $r > 1$ la loi du champ de fuites désirée. Nous nous bornerons au raccordement de pièces polaires produisant des champs magnétiques à indices constants mais de valeurs distinctes pour

les régions définies par $r < 1$ et $r > 1$, la définition des pièces polaires donnant un indice de champ variable $n = n(r)$ devant être faite au moyen de la formule : (3.3).

3.4. *Passage de la région du champ d'accélération à celle du champ de fuites*

Nous venons de voir que pour $N > 0$ la partie radiale du champ croît avec le rayon R dans la région d'accélération, et décroît dans la région du champ de fuites. Le champ étant essentiellement continu, cette partie radiale passe par un maximum pour une valeur donnée de $R = R_0$. Par définition, nous appellerons cette valeur R_0 le rayon de l'accélérateur considéré.

Nous appellerons : région (1) d'accélération, la région intérieure au plus grand cylindre $C_1 (R_1 < R_0)$ dans laquelle les écarts de $n(R)$, par rapport à la valeur constante n_1 , sont inférieurs aux tolérances; la région (2) du champ de fuites, celle qui est extérieure au plus petit cylindre $C_2 (R_2 > R_0)$ pour laquelle les écarts de $n(R)$ par rapport à la valeur constante n_2 prise pour l'indice du champ de fuites ne dépassent pas les tolérances. La région (T) comprise entre ces deux cylindres C_1 et C_2 sera appelée région de transition et on devra y assurer le raccord maxwellien des champs des deux régions (1) et (2).

A chaque quantité que nous utiliserons, nous allons associer un des trois indices 1, T, ou 2, suivant que cette quantité est définie pour la région (1) d'accélération, (T) de transition, ou (2) du champ de fuites.

Pour assurer un tel raccordement d'une façon rigoureusement maxwellienne, il suffit de prendre une expression $n(R)$ continue et dérivable, telle que :

$$1) \quad n(R = R_0) = 0 \text{ pour être compatible avec la définition de } R_0$$

$$2) \quad |n(R \leq R_1) - n_1| < 10^{-\eta_1}$$

$$3) \quad |n(R \geq R_2) - n_2| < 10^{-\eta_2} \quad .$$

Ces deux équations traduisent la compatibilité avec les tolérances des écarts des deux indices de champ.

4) $R_0 - R_1$ aussi petit que possible, ce qui minimise la partie non utilisée du champ : en effet le champ est utile jusqu'en R_1 , mais a son maximum en R_0 .

La fonction que nous avons choisie est :

$$n(R) = \frac{n_1 + n_2}{2} + \frac{n_2 - n_1}{2} Th\left(\frac{R - R_1}{wR_0}\right) \quad (3.7)$$

avec :

$$R_1 = R_0 \left(1 - \frac{w}{2} \ln(-n_1/n_2)\right) .$$

En effet $n(R_0) = 0$, et si nous prenons $w = 0,001$ nous aurons pour

$$x = \frac{R - R_1}{R_0}$$

$$|1 - Th(x/w)| < 10^{-\eta}$$

avec :

$\eta = 4$	5	6	7	
$x \geq 0,0050$	0,0062	0,0073	0,0085	< 1 %

ce qui, on le vérifie aisément, assure les inégalités 2) et 3) et donne pour

$$4) : \frac{R_0 - R_1}{R_0} < 1 \% .$$

Nous pouvons aisément tirer de cette expression de $n(R)$ le champ magnétique maxwellien qui lui correspond :

$$h_M(R) = \exp \int_{R_0}^{R_1} \frac{n(x) dx}{x} \quad (3.8)$$

figure : 3 et grâce aux expressions (3.4) et (3.3) définir π , d'où U :

$$U = - \frac{\partial \pi}{\partial z}$$

Le calcul de ces solutions rigoureuses peut toutefois devenir fastidieux aux abords de la transition où la valeur élevée de certaines des dérivées

successives de $n(R)$ risque de compromettre une convergence rapide de cette série dont nous devons évaluer la somme. C'est pourquoi nous avons cherché à résoudre ces deux problèmes : celui du champ et celui des surfaces équipotentielles, d'une façon un peu moins rigoureuse mais plus directe.

3.4.1. Raccordement des surfaces équipotentielles

Nous posons $n(R \leq R_1) \equiv n_1$ et $n(R \geq R_2) \equiv n_2$ avec les U_1 et U_2 qui leur correspondent respectivement définis en tenant compte de l'indice propre de la région, en faisant abstraction des deux autres régions. Nous allons chercher à raccorder ces deux surfaces, grâce à la région de transition, en assurant la continuité du potentiel scalaire U et de ses dérivées premières à travers chaque surface de raccordement.

Pour satisfaire à ces conditions de continuité, nous avons pris pour la région de transition un U_T ayant la même forme analytique en ϕ et en Z que U_1 et U_2 , qui, rappelons-le, sont de la forme :

$$U = U_0 \cos(N\phi) r^n z \sigma(z^2/r^2) \quad ,$$

avec $\sigma(z^2/r^2)$ une fonction hypergéométrique de Gauss. Nous voyons que, par suite d'un tel choix de U_T , les trois relations de continuité par cylindre : continuité de U , de $\partial U / \partial \phi$, et de $\partial U / \partial Z$, ne sont plus indépendantes et se réduisent à une seule relation par cylindre ; restent indépendantes les deux relations en $\partial U / \partial R$ dont il faut tenir compte. Pour effectuer ces quatre identifications (deux par cylindre) il nous faut quatre paramètres par puissance de Z . Il nous en faudra un supplémentaire pour satisfaire à la condition de l'extremum de l'énergie :

$$\partial \int_{(V)} (\text{grad } U_T)^2 dV = 0 \quad ,$$

V étant le volume de transition délimité par les deux cylindres C_1 et C_2 , le plan $Z = 0$, et la surface équipotentielle recherchée $U_T = \text{constante}$.

Nous prendrons donc U_T de la forme :

$$U_T = U_0 \cos(N\phi) z \sum_{k=0}^4 \sum_{j=0}^{\infty} a_{jk} r^k (z/r)^{2j} \quad ,$$

où les a_{jk} sont les constantes que nous devons déterminer.

Fig. 3.

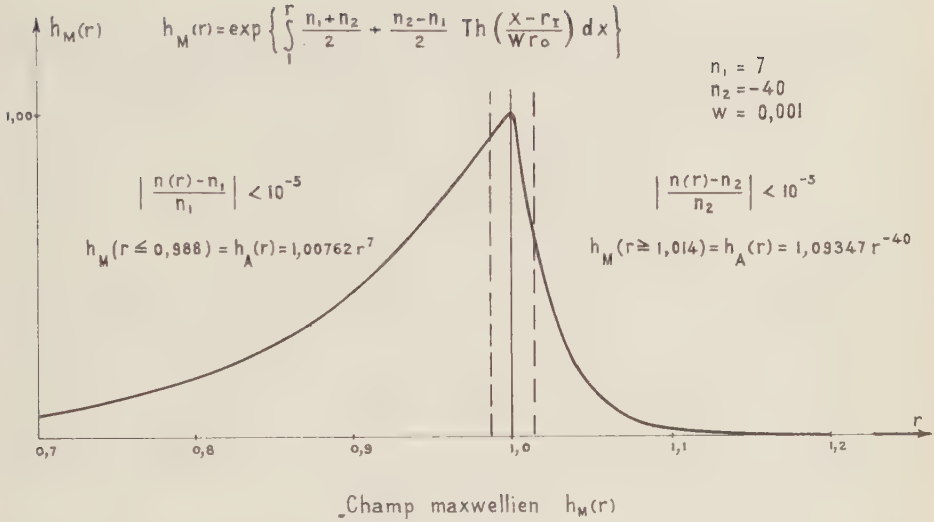
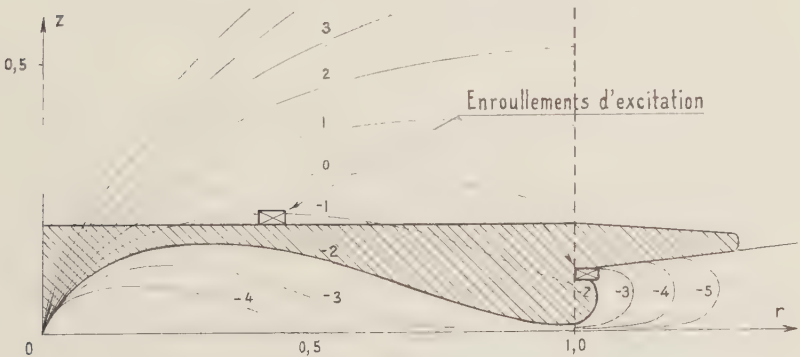


Fig. 4



Section par le plan $\phi = 0$ de la pièce polaire définie par $u = 0,01$ et assurant deux indices constants distincts:

$$n_1(r < 1) = 7$$

$$n_2(r > 1) = -35$$

Comme en pratique la transition a lieu au voisinage du champ le plus intense, l'entrefer y est petit et $|z/r| \ll 1$. Si par ailleurs nous avons :

$$|N^2 - n^2|(z^2/r^2) \ll 6$$

les U_1 et U_2 se réduisent à leur premier terme. Nous aurons, en négligeant les termes d'ordre supérieur, pour U_1 et U_2 :

$$U = U_0 z \cos(N\phi) r^n$$

et pour U_T

$$U_T = U_0 z \cos(N\phi) \sum_{k=0}^4 a_{0k} r^k$$

Les équations de continuité deviennent :

deux de la forme :

$$\sum_0^4 a_{0k} r^k = r^n$$

et deux de la forme :

$$\sum_1^4 k a_{0k} r^{k-1} = n r^{n-1},$$

une pour chaque cylindre.

La condition d'extremum s'écrit :

$$\delta \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} \int_0^{Z(r, \phi)} (\text{grad } U_T)^2 r dz d\phi dr = 0$$

avec

$$Z(r, \phi) = \frac{U_0}{\cos(N\phi) \sum_0^4 a_{0k} r^k}$$

Il ne nous reste plus qu'à résoudre ces 5 équations pour définir les a_{0k} et en déduire l'expression de U_T .

Pour nous faire une idée de l'ordre de grandeur au raccordement des entrefers et de leurs inclinaisons, posons $n_1 = 7$ $n_2 = -40$ et $u = 0,01$; nous aurons $|z/r| \cong 0,01$, $U_1 \cong U_2$ et une différence de pentes faisant un angle de $25,7^\circ$; pour $u = 0,001$ nous n'aurons plus que $2,8^\circ$.

Nous présentons figure : 4 une section par le plan $\phi = 0$ d'une pièce polaire correspondant à $u_0 = 0,01$ et obtenue par simple juxtaposition des

profils correspondants à $n_1 = 7$ ($r \leq 1$) et $n_2 = -35$ ($r \geq 1$). En effet l'entrefer étant petit, les deux régions, celle d'accélération ($r < 1$) et celle du champ de fuites ($r > 1$) sont pratiquement découplées.

Pour $r < 1$ nous prenons le contour théorique; pour $r > 1$, l'équipotentielle « neutre » doit en principe s'étendre à l'infini; comme toutefois la décroissance du champ est très rapide (en r^{-35}), nous l'arrêtons à distance finie : $r \sim 1,3$, pour laquelle le champ est déjà négligeable. Les bobinages seront placés de façon à entourer le « neutre » qui forme ainsi l'armature azimuthale de l'aimant, les retours du champ se faisant par les entrefers. La Figure : 5 présente une vue générale de l'aimant ainsi que la perspective d'un secteur de ce dernier.

La méthode du raccordement approché que nous venons de décrire assure une convergence rapide au cas où les hypothèses faites sur U à la transition ($|z/r| \ll 1$; $|N^2 - n^2| z^2/r^2 \ll 6$) sont satisfaites. Si, en revanche, l'entrefer est grand, le nombre croissant de constantes à déterminer peut rendre le calcul laborieux, et le recours à la méthode générale et exacte peut devenir justifiable.

3.4.2. Définition de la partie radiale du champ: $h(r)$

Tout comme au paragraphe précédent nous supposons un indice constant pour les deux régions (1) et (2) : n_1 et n_2 respectivement. Nous avons vu qu'il était possible de raccorder ces deux lois de champ d'une façon maxwellienne grâce à la région de transition. Un tel raccordement est toutefois onéreux au point de vue du temps de la calculatrice. Nous avons donc cherché à voir si, à l'aide d'un champ à expression simple, il était possible d'obtenir des résultats significatifs à partir desquels nous pourrions extrapoler ceux que l'on aurait obtenus à l'aide d'un champ maxwellien.

Le cas le plus simple qui se présente à l'esprit est évidemment celui pour lequel la région de transition disparaît. Ce cas correspond dans l'équation (3.7) à $w = 0$. Ce champ limite, que nous appellerons $H_0(R)$, présente un point anguleux correspondant au passage abrupt d'un indice à l'autre. Nous poserons :

$$H_0(R) \propto h_0(R)$$

Fig. 5a

PLAN DE L'ACCÉLÉRATEUR

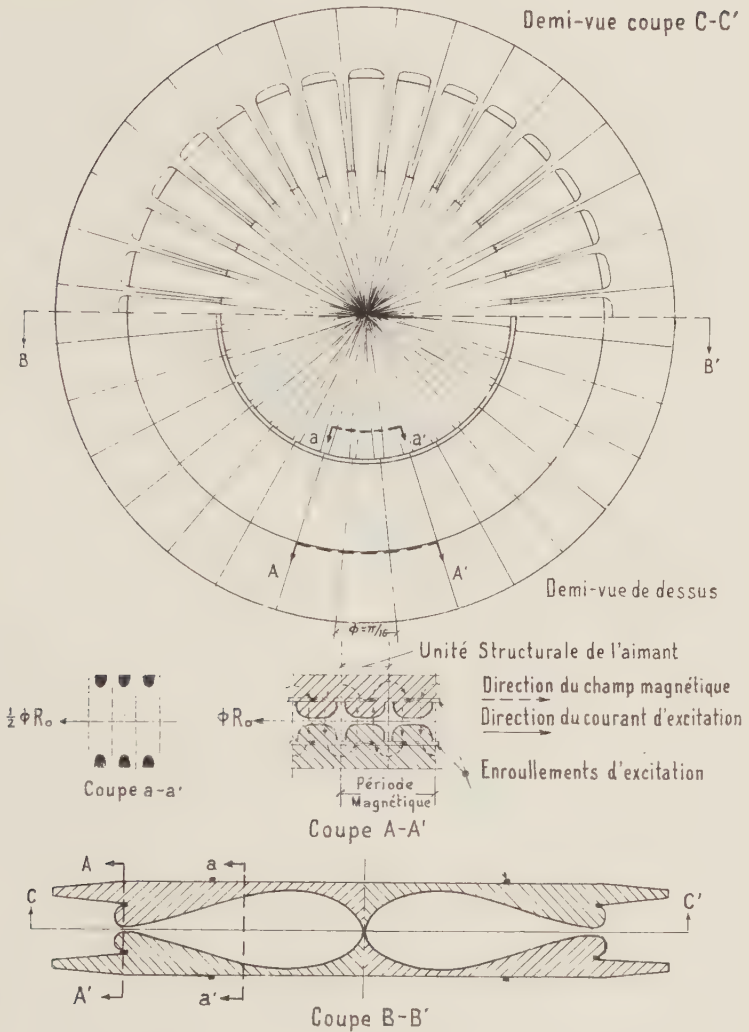
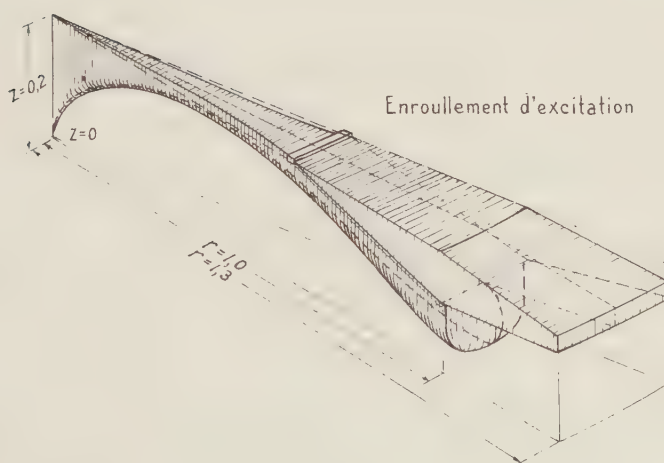


Fig. 5b

En.....: section par le plan de symétrie



Vue d'une unité structurale de l'aimant.
(Secteur soutenant un angle $\phi = \pi/16$)

la constante de proportionnalité (que nous appellerons par la suite H_0) servant à définir l'intensité du champ magnétique, et où nous définissons $h_0(R)$ par :

$$\begin{aligned} h_0(R \leq R_0) &= (R/R_0)^{n_1} \\ h_0(R > R_0) &= (R/R_0)^{n_2} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Pour avoir un ordre de grandeur de la perturbation introduite par le point anguleux (en R_0) sans pour cela passer par le champ continu, à cause de la programmation, nous avons étudié la différence entre les résultats obtenus avec le champ $H_0(R)$ (à un point anguleux) et ceux d'un champ à deux points anguleux et présentant en même temps un simulacre d'arrondi dans la partie de transition. Nous avons choisi pour cela une loi de champ que nous avons appelée :

$$H_T(R) \propto h_T(R) \text{ telle que :}$$

$$\begin{aligned} h_T(R \leq R_1) &= (R/R_0)^{n_1} \\ h_T(R_1 < R \leq R_2) &= (R_1/R_0)^{n_1} = \text{constante} \\ h_T(R > R_2) &= (R/R_0)^{n_2} \end{aligned} \quad (3.10)$$

ce qui lie les rayons R_1 et R_2 des cylindres C_1 et C_2 :

$$R_2 = R_1^{n_1/n_2} .$$

La comparaison des résultats obtenus à l'aide de ces deux champs a montré, nous le verrons plus loin, qu'ils sont sensibles à la quantité $\int H(R) dR$ rencontrée par la particule le long de sa trajectoire, mais ne dépendent que faiblement de la forme des champs.

Une telle constatation nous a paru suffisante pour justifier l'étude d'un accélérateur produisant un champ en $H_0(R)$.

Nous posons donc :

$$\vec{B}_{(P)} = \vec{k} B_0 \sin(N\phi) h_0(R)$$

comme étant l'expression de l'induction magnétique dans le plan $Z = 0$ de l'accélérateur que nous allons étudier. L'expression (3.6) donne la valeur

du potentiel scalaire et permet d'en déduire $\vec{B}$ en tout point de l'espace. Le champ étant à présent bien défini, il ne nous reste plus qu'à poser les équations du mouvement des particules se déplaçant dans ce champ et à étudier les résultats de leur résolution. C'est ce que nous nous proposons de faire.

DEUXIÈME PARTIE

CHAPITRE IV

Equations du mouvement

Equations du mouvement

Nous avons utilisé, pour décrire le mouvement des particules, le Lagrangien correspondant à l'équation (2.1) :

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2} + q \vec{v} \cdot \text{rot} (\vec{k} \pi)$$

où $\vec{v}$ est la vitesse de la particule, c celle de la lumière et $\beta^2 = v^2/c^2$.

Nous utiliserons dans tout ce qui suit le système de coordonnées cylindriques normées avec $r = R/R_0$; ϕ et $z = Z/R_0$.

Par ailleurs, les intersections des orbites d'équilibre, c'est-à-dire les points de collision se situant aux nœuds du champ magnétique, notamment pour $\phi = k\pi/N$, nous poserons $\varphi = \phi - k\pi/N$.

Comme le champ est magnétostatique, nous avons l'intégrale première des forces vives :

$$|\vec{p}| = p = \text{constante au cours du mouvement};$$

et le mouvement ayant lieu dans le vide.

$$\vec{B} = \text{rot rot} (\vec{k} \pi) = -\text{grad } U.$$

Les équations du mouvement s'écrivent dès lors :

$$\begin{pmatrix} r'' - r\varphi'^2 \\ (r^2\varphi')' \\ z'' \end{pmatrix} = \frac{q}{p} \begin{pmatrix} \frac{z'}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} - r\varphi' \frac{\partial U}{\partial z} \\ rr' \frac{\partial U}{\partial z} - rz' \frac{\partial U}{\partial r} \\ r\varphi' \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{r'}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

où l'opérateur :

$$(\)' = \frac{d(\)}{ds}$$

et ds : l'élément de courbe prise le long de la trajectoire. Cela donne, en tenant compte de l'antisymétrie de U par rapport à $Z = 0$ et à $\phi = k\pi/N$, deux familles de trajectoires planes :

1. Les trajectoires du plan (P): $Z = 0$ avec

$$\begin{pmatrix} r'' - r\varphi'^2 \\ (r^2\varphi')' \end{pmatrix} = \frac{qr}{\rho} \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)_{z=0} \begin{pmatrix} -\varphi' \\ r' \end{pmatrix} .$$

2. Les trajectoires des plans $\phi = k\pi/N$ ($\varphi = 0$) avec :

$$\begin{pmatrix} r'' \\ z'' \end{pmatrix} = \frac{q}{pr} \left(\frac{\partial U}{\partial \phi} \right)_{\phi=k\pi/N} \begin{pmatrix} z' \\ -r' \end{pmatrix} .$$

Comme nous supposons pour chaque région de l'espace un champ à indice essentiellement constant, nous aurons, comme nous l'avons déjà vu :

$$U = B_0 R_0 \sin(N\phi) r^n z \sigma(z^2/r^2)$$

avec $\sigma(x)$, fonction hypergéométrique de Gauss, définie par

$$\sigma(x) = F_{2,1} \left(\frac{N-n}{2}, -\frac{N+n}{2}; \frac{3}{2}; -x \right) .$$

En portant la valeur de U dans les équations du mouvement nous voyons que, même dans le cas des trajectoires planes, la seule connaissance de l'intégrale première des forces vives n'est pas suffisante pour réduire le problème à des quadratures; nous sommes donc astreints à résoudre numériquement ces équations.

Nous remarquerons ici que par suite du croisement des orbites d'équilibre à un angle $2\psi_0$, le centre de masse des deux particules identiques subissant la collision est en mouvement par rapport au système du laboratoire. Il faut donc tenir compte de la valeur de :

$$p = p(\vec{p}/p) .$$

Cherchons à définir cette relation.

Collision élastique de deux particules identiques ayant la même énergie

Considérons une collision élastique entre deux particules identiques possédant la même quantité de mouvement p_0 , et faisant un angle $2\psi_0$ entre elles. La conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement donne, pour le mouvement ultérieur, une quantité de mouvement, p , de l'une des particules, satisfaisant à l'expression :

$$\frac{p}{p_0} = F(\psi, \gamma) = \frac{\cos \psi \cos \psi_0 (\gamma^2 \sin^2 \psi_0 + \cos^2 \psi_0) + \gamma \sqrt{\Delta}}{\gamma^2 (1 - \cos^2 \psi \cos^2 \psi_0) + \cos^2 \psi \cos^2 \psi_0}$$

avec

$$\Delta = \gamma^2 \sin^4 \psi_0 + \cos^2 \psi_0 (\sin^2 \psi_0 - \sin^2 \psi)$$

où ψ et ψ_0 sont les angles que font les directions respectivement de recul et d'incidence de la particule à la collision avec la direction du mouvement du centre de masse, et γ le rapport de l'énergie totale de la particule avant la collision, à son énergie au repos. La figure : 6 présente $p/p_0 = F(\psi, \gamma)$ pour différentes valeurs de γ (pris comme paramètre) : $\gamma = 1$ (particules classiques); $\sqrt{2}$; 4; ∞ (particules relativistes dures).

Nous avons vu que pour la configuration du champ que nous nous sommes imposé ($\vec{B}(Z=0) = \vec{k} B_0 h(r) \sin N\phi$) les orbites d'équilibre sont planes (plan $Z=0$) et que les deux orbites d'équilibre correspondant à une même énergie, sont symétriques par rapport aux plans $\phi = k\pi/N$.

Les points auxquels ces orbites se coupent se trouvent sur la droite (D) définie par l'intersection des plans ($Z=0$) et ($\phi = k\pi/N$). Ces orbites d'équilibre sont décrites par des particules identiques et de même énergie. De plus, le parcours sur chacune de ces orbites se fait dans un sens opposé à celui de l'autre.

Nous en concluons que, par la raison de cette double symétrie, la résultante (P) de la quantité de mouvement de deux particules venant subir une collision sur (D) sera dirigée le long de cette droite (D).

En prenant $\vec{r}_0$ pour le vecteur unitaire dirigé le long de (D) et orienté de l'origine vers le point de la collision considérée nous pouvons écrire :

$$\vec{P} = \varepsilon \vec{r}_0 |\vec{P}| \quad \text{ou} \quad \varepsilon = \pm 1$$

Pour définir le signe qu'il convient de choisir, nous devons tenir compte :

1) du sens de croissance azimutale du champ à partir du point de collision, c'est-à-dire, pour une induction $B(Z=0)B_0h(r) \sin N\phi$ et une collision en $\phi = k\pi/N$, tenir compte de la valeur de k : pair ou impair.

2) du signe de la charge que portent les particules.

Il est aisé de se rendre compte que pour des particules négatives (électrons)

$$\varepsilon = (-1)^k$$

et que pour des particules positives

$$\varepsilon = (-1)^{k+1}$$

Nous pouvons écrire dès lors :

$$\vec{P} = (-1)^h \vec{r}_0 | \vec{P} |$$

en posant :

$$h = k + \begin{cases} 0 & \text{si } q = -|q| \\ 1 & \text{si } q = |q| \end{cases}$$

Pour rattacher ψ à nos axes de coordonnées, il suffit d'écrire :

$$\psi = \alpha + h\pi$$

où α est l'angle orienté, compté à partir de $\vec{r}_0$ jusqu'à $\vec{q}$ au moment du recul qui suit la collision.

Le rapport $p/p_0 = F(\alpha, \gamma)$ s'écrit :

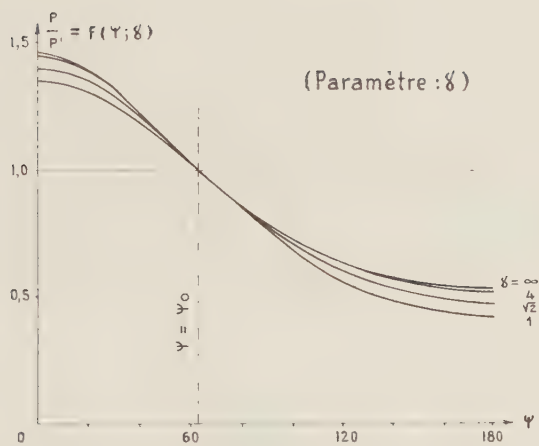
$$\frac{p}{p_0} = F(\alpha, \gamma) = \frac{(-1)^h \cos \alpha \cos \psi_0 (\gamma^2 \sin^2 \psi_0 + \cos^2 \psi_0) + \gamma \sqrt{\Delta}}{\gamma^2 (1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \psi_0) + \cos^2 \alpha \cos^2 \psi_0}$$

et

$$\Delta = \gamma^2 \sin^4 \psi_0 + \cos^2 \psi_0 (\sin^2 \psi_0 - \sin^2 \alpha) \quad .$$

Nous définirons la direction d'émission de la particule subissant la collision par la longitude, L , et la latitude, l , elles-mêmes définies sur la sphère centrée sur le point de la collision considérée, d'axe polaire parallèle à $\vec{k}$, avec les longitudes comptées dans le sens direct à partir du plan méridien (OZ , Or_0). Cela donne pour α :

$$\cos \alpha = \cos L \cos l \quad .$$



Valeur de la quantité de mouvement de la particule après la collision, en fonction de la direction de recul.

Paramètre : ξ (énergie de la particule avant la collision)

Fig. 6.

Remarques concernant la fonction F

1. $\gamma \rightarrow \infty$: Cas des particules relativistes « dures ».

En effectuant un développement limité en $1/\gamma^2$ et en négligeant les termes d'ordre supérieur, nous avons :

$$F = F_{\infty} - H/\gamma^2$$

où

$$F_{\infty} = \frac{\sin^2 \psi_0}{1 - \cos \psi \cos \psi_0}$$

avec :

$$0 \leq H = \frac{\cotg^2 \psi_0 (\cos \psi_0 - \cos \psi)^2}{2(1 - \cos \psi \cos \psi_0)^2} \leq \cotg^2 \psi_0.$$

Si nous confondons F avec F_x , nous commettons une erreur δ sur F , et la relation en H nous permet de définir la limite inférieure de γ compatible avec les tolérances imposées à δ . En effet nous aurons :

$$\delta \leq \Delta$$

si

$$\gamma \geq \frac{\cotg \psi_0}{(2\Delta)^{1/2}}.$$

2. $\gamma \rightarrow 1$: Cas des particules de la mécanique classique.

En effectuant un développement limité en $\gamma = 1 + \varepsilon$ et en ne gardant que les termes en ε nous pouvons écrire :

$$F = F_0 + G \cdot \varepsilon$$

avec :

$$F_0 = \cos \psi \cos \psi_0 + \sqrt{\sin^2 \psi_0 - \cos^2 \psi_0 \sin^2 \psi}$$

et

$$G = -2 \sin^2 \psi \cos \psi \cos^3 \psi_0 + \frac{\cos \psi_0 (\cos^2 \psi_0 - \cos^2 \psi + 2 \cos^2 \psi \sin^2 \psi_0 - 2 \cos^2 \psi \cos^2 \psi_0 \sin^2 \psi)}{\sqrt{\sin^2 \psi_0 - \cos^2 \psi_0 \sin^2 \psi}}$$

avec

$$0 \leq G \leq \frac{1}{2} \sin 2\psi_0 .$$

Si nous confondons F avec F_0 , nous commettons une erreur δ sur F , et la relation en G nous permet de définir la limite supérieure de γ compatible avec les tolérances imposées à δ . En effet nous avons :

$$\delta \leq \Delta$$

si

$$\gamma - 1 \leq 2\Delta / \sin 2\psi_0 .$$

3. En dehors de ces limites de γ nous ne pouvons plus considérer F comme indépendant de l'énergie initiale de la particule. Si, toutefois, la dispersion des énergies initiales est faible, nous pouvons développer F au voisinage de l'énergie moyenne, et confondre F avec F_M (F_M correspondant à l'énergie moyenne), tant que la dispersion ne dépasse pas les bornes tolérées, c'est-à-dire :

$$|\Delta\gamma| \leq \frac{\Delta}{\partial F / \partial \gamma} .$$

Or :

$$\frac{\partial F_M}{\partial \gamma} = \frac{\sin \psi_0 \cos^2 \psi_0}{(\gamma^2 \sin^2 \psi_0 + \cos^2 \psi_0)^{3/2}}$$

d'où :

$$\frac{\Delta\gamma}{\gamma} \leq \frac{\Delta}{\gamma} \frac{(\gamma^2 \sin^2 \psi_0 + \cos^2 \psi_0)^{3/2}}{\sin \psi_0 \cos^2 \psi_0} .$$

Voici par exemple pour l'accélérateur que nous considérons ($N = 16$; $n_1 = 7$) quelques valeurs numériques, suivant la précision Δ requise sur p/p_0 :

Δ		10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}
F_∞ :	$\gamma \geq$	121,42	38,40	12,14	3,84	1,21
F_0 :	$\gamma - 1 \leq$	$2,3 \cdot 10^{-5}$	$2,3 \cdot 10^{-4}$	$2,3 \cdot 10^{-3}$	0,023	0,23
$F_M(\gamma = 4)$:	$\Delta\gamma/\gamma \leq$	0,05 %	0,5 %	5 %	—	—

Nous pourrions, moyennant ces précautions, étudier les trajectoires d'un accélérateur à l'aide d'un seul F moyen, si les énergies correspondent

aux limites des tolérances, et seulement dans ce cas. Il n'en sera plus de même si ces tolérances sont dépassées, les spectres angulaires des quantités de mouvement ne se correspondant plus.

En tenant compte de ce qui vient d'être dit nous pouvons en toute quiétude prendre pour $\gamma = 180^\circ$ $F = F_x$, et les équations du mouvement deviennent :

1) Plan $Z = 0$

$$\begin{Bmatrix} r'' - r\varphi'^2 \\ (r^2\varphi')' \end{Bmatrix} = \frac{|q|B_0R_0 \sin N\phi r^{n+1} [\cos \alpha \cos \psi_0 - (-1)^h]}{p_0 \sin^2 \psi_0} \begin{Bmatrix} \varphi' \\ -r' \end{Bmatrix} \quad (4.1a)$$

2) Plan $\phi = k\pi/N$

$$\begin{Bmatrix} r'' \\ z'' \end{Bmatrix} = \frac{|q|B_0R_0Nr^n z \sigma (z^2/r^2) [\cos \alpha \cos \psi_0 - (-1)^h]}{rp_0 \sin^2 \psi_0} \begin{Bmatrix} -z' \\ r' \end{Bmatrix} \quad (4.1b)$$

3) Courbes gauches en général :

$$\begin{Bmatrix} r'' - r\varphi'^2 \\ (r^2\varphi')' \\ z'' \end{Bmatrix} = \frac{|q|B_0R_0 [\cos \alpha \cos \psi_0 - (-1)^h]}{p_0 \sin^2 \psi_0} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

avec :

$$\begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r^n \left[\frac{z'}{r} N \cos (N\varphi) z \sigma - r\varphi' \sin (N\varphi) \frac{\partial}{\partial z} (z\sigma) \right] \\ r \sin (N\varphi) \left[r' r^n \frac{\partial}{\partial z} (z\sigma) - z' z \frac{\partial}{\partial r} (r^n \sigma) \right] \\ z \left[r\varphi' \sin (N\varphi) \frac{\partial}{\partial r} (r^n \sigma) - \frac{r'}{r} N \cos (N\varphi) r^n \sigma \right] \end{Bmatrix}$$

Par définition et par analogie avec les propriétés du champ magnétique de l'accélérateur vis-à-vis des trajectoires sortant vers l'extérieur dans le plan $Z = 0$, nous dirons, dans tout ce qui suit, avoir affaire à un secteur D si h est pair et à un secteur F si h est impair.

Nous nous proposons maintenant de résoudre ces équations numériquement.

5. Résolution des équations du mouvement

La résolution des équations du mouvement a été effectuée numériquement sur la calculatrice Mercury de l'Organisation Européenne pour la Recherche Nucléaire (CERN) suivant le programme Autocode 330P1 que nous avons élaboré à cet effet. Ce programme s'appuie sur la résolution, par la méthode de Runge-Kutta, des trois équations différentielles du second ordre (réduites à six équations différentielles du premier ordre), la variable principale étant l'élément de courbe « ds » pris le long de la trajectoire.

Cette méthode d'intégration (cf. par exemple, référence : 21) consiste à définir le point P_{n+1} à partir du Point P_n de façon à ce que la valeur ainsi obtenue coïncide avec celle du développement de P_{n+1} en série de h avec une précision meilleure que la quatrième puissance de h ; h est dit le pas d'intégration et nous prendrons $h = ds$.

La valeur adoptée par le CERN pour les paramètres N et n_1 de l'accélérateur sont : $N = 16$; $n_1 = 7$. En effet les calculs de M. N. Vogt-Nilsen (référence : 12) ont montré que le couple $N = 16$; $n_1 = 7$ assurait la stabilité des orbites, et que la valeur de ψ_0 qui leur correspond est $\psi_0 = 62^\circ 20'$.

Le programme 330P1 a donc été conçu avec ces valeurs numériques pour la périodicité azimutale, l'indice du champ interne, et l'angle d'intersection des orbites. Il permet en outre de choisir à volonté pour la variation radiale, soit la loi en $H_0(R)$, soit celle en $H_T(R)$, toutes deux déjà définies plus haut. Cette précaution permet d'estimer l'influence sur les trajectoires d'un éventuel écart dans la loi du champ par rapport à la loi du champ $H_0(R)$.

5.1. Paramètres calculés

Le calcul a été effectué en vue d'obtenir, pour différentes conditions initiales, les paramètres asymptotes du mouvement. Nous avons admis

que la trajectoire se confondait avec son asymptote rectiligne (c'est-à-dire avec sa tangente) à l'extérieur du cylindre $C_E(r = 1,3)$ ou à l'intérieur du cylindre $C_I(r = 0,5)$. En effet pour $r \geq 1,3$ le champ magnétique tombe à moins de 0,001 de sa valeur maximum pour les indices $n_2 \leq -26,4$, tandis que pour $r \leq 0,5$ et $n_2 \geq 7$ le champ tombe à moins de 1 % de sa valeur maximum, ce qui, avec l'alternance rapide des secteurs et la réduction de leurs dimensions linéaires vers le centre, rend les trajectoires pratiquement droites. Ces deux zones où les trajectoires deviennent rectilignes nous permettent de distinguer entre ce que nous appellerons respectivement les trajectoires sortant vers l'extérieur de l'anneau ($r > 1,3$) et les trajectoires sortant par l'intérieur de l'anneau de l'accélérateur ($r < 0,5$).

Les paramètres calculés sont :

1) Les coordonnées cylindriques du point où la trajectoire traverse le cylindre $r = 1,3$ ou le cylindre $r = 0,5$, suivant le cas qui se présente, ou encore les coordonnées en général du point auquel l'intégration s'arrête pour une des raisons que nous allons spécifier.

2) La direction de la tangente à la trajectoire en ce point, définie par sa latitude comptée à partir du plan équatorial $Z = 0$, ainsi que par sa longitude mesurée dans le sens direct, à partir du rayon vecteur $\vec{r}_0$ définissant le point de la collision des orbites d'équilibre dont la trajectoire considérée est issue. Dans le cas des mouvements plans seul l'un des deux angles est retenu et appelé θ , la valeur de l'autre étant évidente (soit 0, soit π , suivant le cas considéré).

L'ensemble de ces paramètres définit complètement la trajectoire asymptote dans l'espace.

Dans le cas des mouvements plans, le programme donne en outre pour le plan équatorial $Z = 0$, la distance perpendiculaire de l'origine à la trajectoire asymptote, et pour le mouvement dans les plans méridiens $\phi = k\pi$, la pente de cette droite ainsi que l'ordonnée z du point auquel elle coupe l'axe des z .

5.2. Précision, précautions et flexibilité du calcul

Une étude préliminaire a permis de déterminer la longueur du pas « ds » d'intégration maximum nécessaire pour avoir une précision de trois chiffres significatifs dans les résultats obtenus. Il est apparu, en comparant

des résultats successifs pour différentes valeurs de « ds », que le calcul d'une trajectoire voisine de la trajectoire orbite d'équilibre peut être effectué à l'aide d'un $ds = 0,002$ sans que les résultats (à trois chiffres significatifs) diffèrent de ceux obtenus à l'aide d'un « ds » inférieur à 0,002. Il n'en est plus de même lorsque le cylindre de transition $r = 1$ est franchi. Le programme de la machine étant prévu pour l'indice de champ P_0 (point de départ), la calculatrice extrapole de proche en proche, de sorte que la loi est fautive au-delà de $r = 1$. Le calcul prouve que cette erreur n'est pas négligeable. De plus pour $r > 1$ la variation plus rapide du champ de fuite nécessite un « ds » plus petit. Nous remarquerons qu'un tel champ de fuite devient négligeable pour des valeurs de $r > 1$, celles-ci étant d'autant plus faibles que n est plus petit ($n < 0$).

Pour remédier à ces fluctuations propres au pas « ds » fini, sans pour cela accroître d'une façon trop importante le temps de calcul de la machine, nous avons eu recours au procédé suivant : « ds » est posé égal à $ds_0 = 0,002$. Lorsqu'il se trouve que « ds » est supérieur à la distance séparant le point P_0 du cylindre $r = 1$ de séparation des indices, « ds » est diminué de moitié avant de poursuivre l'intégration, et cela jusqu'à atteindre une valeur inférieure ou égale à 10^{-6} . Le pas « ds » est alors bloqué à sa nouvelle valeur jusqu'à ce que le point P_0 soit extérieur au cylindre C_0 ($r = 1$). La valeur de « ds » est alors posée égale à $|n_1 ds_0 / n_2|$ jusqu'à ce que le champ $h(r)$ tombe à moins de 0,001 de sa valeur maximum. Le « ds » est alors décuplé à chaque pas jusqu'à ce que $ds \geq 0,005$, puis gardé fixe jusqu'à ce que le point P_0 se trouve à moins de 0,1 du cylindre $r = 1,3$. Le « ds » est alors posé égal à cette distance radiale à chaque pas et l'intégration ainsi poursuivie jusqu'à ce que P_0 atteigne le rayon $r = 1,3$ avec une précision de 0,0001. L'intégration est alors terminée et les paramètres de la trajectoire ainsi que ceux de sa tangente sont retenus.

Dans le cas où la particule arrive au voisinage du cylindre $r = 1$ et rebrousse chemin, le « ds » est rajusté à la valeur ds_0 dès que $\frac{dr}{ds}$ devient négatif, cela pour s'assurer une poursuite de l'intégration à un pas raisonnable.

L'intégration est alors arrêtée dès que le point P_0 atteint le cylindre $r = 0,5$; la particule est alors considérée comme sortie de l'accélérateur par l'intérieur de l'anneau et les paramètres de la trajectoire sont retenus.

Une précaution spéciale est prise concernant les trajectoires voisines de la trajectoire d'équilibre; en effet de telles trajectoires tendraient à osciller autour de l'orbite d'équilibre plus ou moins longtemps et finiraient par sortir dans des directions distinctes de celles sous lesquelles on souhaiterait les observer. De telles trajectoires prennent un temps considérable à calculer et ne nous intéressent pas, notre étude étant celle des particules sortantes et utilisables à des fins expérimentales. Pour éliminer de telles trajectoires existant dans l'accélérateur et qui iraient se perdre quelque part sur les parois de la chambre à vide ou sur celles du système d'accélération, nous arrêtons l'intégration dès que le point P_0 a parcouru azimuthalement un angle $\varphi \geq \varphi_{\max}$, ou $\varphi_{\max}$ est un angle réglable à volonté et introduit dans la machine parmi les données.

L'intégration s'arrête aussi si au cours du calcul, pour $r > 1$, la valeur $|z/r|$ des coordonnées cylindriques de P_0 devient supérieure à un nombre $|z/r|_{\max} \leq 1$ spécifié dans les données à la machine et réglable à volonté. Cette précaution assure (pour le domaine des n_2 considérés) la convergence de la fonction hypergéométrique (dont nous pouvons prendre jusqu'à cent termes) correspondant au prolongement analytique du champ en dehors du plan équatorial $Z = 0$.

Une dernière restriction variable est imposée aux trajectoires gauches pour permettre l'étude de la transparence de l'accélérateur aux particules sortantes.

Dès qu'une particule atteint la surface équipotentielle définie par U tel que $|U| = |U_0| = |B_0 R_0 u_0 \sin N\phi|$ (avec $u_0 \geq 0$ introduit dans les données et réglable à volonté) le calcul est arrêté, la particule étant supposée perdue contre la pièce polaire définie par cette valeur de U_0 . Cela nous permet d'évaluer la transparence d'un accélérateur dont la chambre à vide serait toute transparente aux trajectoires, ou, ce qui revient au même, suivrait le contour des pièces polaires. Nous obtenons ainsi la limite supérieure de la transparence pour un nombre d'ampères-tours donné.

Nous pouvons aussi limiter le parcours des trajectoires en imposant une limite à leur écart du plan $z = 0$ telle que $|z| \leq \hat{z}$, ce qui correspond à introduire une chambre à vide d'une demi-hauteur $z = \hat{z}$, opaque aux trajectoires, et qui ne laisserait sortir les particules que par sa surface latérale.

5.3. Conditions initiales et paramètres à introduire au programme 330P1

Outre les deux paramètres $N = 16$ et $n_1 = 7$ propres au programme 330P1 et les six paramètres ds , $r_1 (\leq 1)$, n_2 , u_0 , $\hat{z}$ et $|z/r|_{\max}$, dont nous avons déjà parlé et qui doivent être introduits au programme au début du calcul, nous aurons à spécifier :

1. La valeur maximum B_0 (en weber/m²) qu'atteint l'induction magnétique dans le plan équatorial $Z = 0$ de la machine.
2. Le rayon R_0 (mètres) pour lequel l'induction magnétique atteint sa valeur maximum.
3. L'énergie au repos, E_0 (en Mev), de la particule accélérée.
4. L'énergie totale E (en Mev) de la particule avant sa collision. Le programme en déduit automatiquement la coordonnée r du point $P_E(r; k\pi; 0)$ où les deux orbites d'équilibre correspondant à cette énergie ont leur intersection.
5. L'allure du champ au point de la collision considérée : champ croissant ou décroissant azimuthalement, c'est-à-dire en tenant compte du signe de la charge de la particule accélérée (la charge est supposée être unitaire par le programme 330P1), s'il est focalisant (secteur F) ou défocalisant (secteur D) pour un mouvement vers l'extérieur dans le plan $Z = 0$.
6. Les coordonnées z_0 et φ_0 du point $P(r; k\pi + \varphi_0; z_0)$ auquel a lieu la collision considérée. Cela permet d'évaluer pour $z_0 \neq 0$ et $\varphi_0 \neq 0$, l'effet sur les paramètres de sortie, des collisions de particules effectuant des oscillations bétatroniques stables autour de l'orbite d'équilibre, correspondant à la même énergie, et de tenir ainsi compte des dimensions finies du faisceau accéléré.
7. Les angles définissant la direction de la tangente à la trajectoire sortante au point de la collision (le programme associe automatiquement à une direction ainsi définie la quantité de mouvement adéquate) : latitude « I » (par rapport au plan $Z = 0$) et la longitude « L » (comptée à partir du rayon vecteur $\vec{OP}_E$ correspondant au point de la collision à l'étude).
8. Nous spécifierons enfin un certain nombre de paramètres clef nous permettant d'étendre ou de restreindre à volonté les calculs suivant les domaines des paramètres L , I , E et n_2 que nous voulons étudier, ainsi

que de contrôler les paramètres que nous voulons connaître et faire imprimer par la machine.

Nous reproduisons ici le tableau donnant les paramètres fournis à la machine à chaque calcul, dans l'ordre de leur introduction. Ceux qui ont été déjà définis plus haut ne seront présentés ici que par le symbole qui leur a été associé.

5.4. *Données du 330P1*

Nous donnons ci-dessous les différents paramètres fournis à la calculatrice présentés dans l'ordre de leur introduction. Les symboles à l'extrême gauche représentent les symboles code utilisés par le 330P1 et ne doivent pas être confondus avec ceux que nous utilisons dans le texte. Ces symboles sont suivis par une explication de leur signification ou sont rattachés à des termes ou symboles déjà utilisés dans le texte.

- $K \geq 1$ nombre d'indices n_2 que nous introduisons pour être étudiés un à un en fonction de chaque énergie E que nous spécifions plus bas.
- $L \geq 1$ nombre des énergies E que nous désirons couvrir pour chaque indice n_2 .
- 0 paramètre permettant de régler le nombre de sorties des résultats au cours du calcul. 0 > zéro indique le nombre de pas d'intégration effectué entre deux impressions successives qui donnent la position de la particule dans l'espace à ce stade du calcul. Pour les mouvements plans, les trajectoires sont directement portées sur un graphique; pour les trajectoires gauches, les coordonnées du point sont présentées sous forme tabulaire, les paramètres définissant la tangente en chaque point pouvant être imprimés ou supprimés à volonté, suivant la valeur que nous donnons au paramètre B_{14} : $B_{14} > 0$ les informations concernant la tangente sont supprimées; $B_{14} \leq 0$ la direction de la tangente est spécifiée. Si $0 \leq$ zéro, seuls sont donnés les paramètres définissant la trajectoire et sa direction à la fin du calcul. Nous avons déjà vu quels étaient ces paramètres et quelles pouvaient être les causes d'un arrêt de calcul.

F' coefficient permettant de simuler pour la particule subissant une collision un champ F' fois plus intense que celui correspondant à l'orbite d'équilibre envisagée.

$$B_2 = r_1 \leq 1$$

$$B_3 = ds.$$

$$B_4 = |z/r| \text{ maximum}$$

$$B_5 = L : \text{valeur initiale (en degrés) de } L.$$

B_6 = incrément (exprimé en degrés) par lequel L varie d'un calcul à un autre définissant ainsi à chaque fois une nouvelle direction, c'est-à-dire une nouvelle trajectoire — les autres paramètres restent inchangés. Cette variation de L est limitée par :

$$1) \text{ si } B_6 > 0 \quad B_5 \leq L < D_9 \leq 180^\circ$$

$$2) \text{ si } B_6 < 0 \quad D_9 < L \leq B_5 \text{ (} D_9 \text{ étant défini plus bas).}$$

La limite ayant été atteinte la calculatrice change de secteur suivant la valeur de B_{13} , repose $L = B_5$ et, pour les trajectoires gauches, passe à la valeur suivante de l . Pour les trajectoires planes elle passe directement à l'énergie E suivante ; les trajectoires gauches y reviennent une fois que la limite de l est atteinte. Les énergies E sont étudiées une à une jusqu'à leur épuisement. C'est alors que la calculatrice passe au n_2 suivant et reprend ainsi tout le calcul pour chaque valeur de n_2 . Après l'épuisement de tous les n_2 la machine s'arrête et demande de nouvelles instructions.

$$B_7 = \text{valeur initiale (en degrés) de } l.$$

B_8 = incrément de l (exprimé en degrés). (cf. B_6 en remplaçant L par l). Pour les trajectoires gauches l est limité par $l \leq 90^\circ$ après quoi la calculatrice pose $L = B_5$ $l = B_7$, et le cycle est repris comme décrit au B_6 ; pour les trajectoires dans le plan méridien, l , est limité par :

$$1) \ B_8 > 0 \quad B_7 \leq l < B_{47} \leq 180^\circ$$

$$2) \ B_8 < 0 \quad B_{47} < l \leq B_7.$$

$$B_9 = u_0.$$

- B_{10} = $\hat{z}$: demi-hauteur de la chambre à vide envisagée.
- B_{11} = z_0
- B_{12} = φ_0
- B_{13} = paramètre permettant l'étude de collisions dans un secteur $F(B_{13} = 0,1)$, dans un secteur $D(B_{13} = 3,1)$, ou successivement dans les secteurs F et $D(B_{13} = 1,1)$.
- B_{14} = paramètre contrôlant la sortie des résultats dans le cas des études des trajectoires gauches — voir pour plus de détails ce qui a été dit pour 0.
- B_{15} $\varphi_{\max.}$ (en radians).
- B_{16} = B_0 (weber/m²).
- B_{17} = R_0 (mètres).
- B_{18} = E_0 (MeV).
- $B_{19} - B_{(K+18)}$: ensemble des K indices n_2 que nous allons étudier.
- $B_{(K+19)} - B_{(K+L+18)}$: ensemble des L énergies (en MeV) que nous nous proposons d'étudier pour chaque n_2 susmentionné.
- D_9 paramètre (angle en degrés) permettant de limiter la variation de L .
- B_{46} paramètre de sélection permettant, suivant sa valeur, de couvrir, dans le cas de trajectoires gauches : pour $B_{46} > 0$, toutes les valeurs de L (dans les limites que nous avons déjà explicitées); pour $B_{46} < 0$, de ne couvrir les valeurs permises de L que jusqu'à la première perte de la particule sans sortie, soit à l'extérieur, soit à l'intérieur, pour passer directement au l suivant.
- B_{47} paramètre (angle en degrés) permettant de limiter la variation de L .

6. Résultats

Le projet de l'accélérateur qui avait été étudié par le CERN prévoyait une périodicité azimutale $N = 16$ et un indice du champ dans la chambre d'accélération de $-7 (n_1 = 7)$ pour assurer la stabilité vis-à-vis des oscillations bétatroniques (cf. références : 10, 12, 13). Les collisions devaient avoir lieu entre deux faisceaux d'électrons de 90 MeV, tandis que le champ de fuite des pièces polaires proposées pour un modèle réduit était d'environ 40 ($n_2 = -40$). Nous avons par conséquent étudié les trajectoires pour les valeurs de paramètres adoptées dans le projet en question, soit : $N = 16$; $n_1 = 7$; $n_2 = -40$; $E_0 = 0,5$ MeV; $E = 90$ MeV; $B_0 = 1,2$ W/m² et $R_0 = 2,775$ m.

Nous remarquons en premier lieu que par suite de l'antisymétrie de U par rapport aux plans $Z = 0$ et $\phi = k\pi/N$, les trajectoires issues de l'intersection des deux plans sont symétriques par rapport à ces plans. Nous bornerons donc notre étude à des trajectoires sortant avec des conditions initiales telles que les valeurs de dZ/ds et de $d\phi/ds$ soient non négatives. Dans l'étude des trajectoires nous avons tenu compte des solutions planes des équations du mouvement que nous avons traitées dans le détail, car, comme nous le verrons plus bas, l'étude des courbes gauches montre que les trajectoires récupérables se situent au voisinage de ces plans. Nous avons donc étudié par ordre de complexité croissante :

1. Les trajectoires du plan $Z = 0$ qui contient les orbites d'équilibre et qui est le plan d'accélération.
2. Les trajectoires des plans $\phi = k\pi/N$.
3. Les trajectoires gauches.

Pour chacun de ces groupes, trois cas se présentent, dont deux d'intérêt pratique : les trajectoires sortant vers l'extérieur de l'anneau de l'accélérateur, celles sortant par l'intérieur, et enfin les trajectoires perdues.

Nous remarquons que les trajectoires sortant par l'intérieur de l'accélérateur ne subissent qu'un champ d'un indice unique ($-n_1$), ce qui leur confère les propriétés d'homothétie définies au chapitre II. Nous pouvons donc déduire une trajectoire d'une énergie quelconque, à partir de celle calculée pour une énergie donnée.

En revanche les trajectoires sortant vers l'extérieur de l'accélérateur subissent deux indices de champs différents. ($n_1 = 7$; $n_2 \neq n_1$). Les propriétés d'homothétie sont de ce fait perdues et il nous faudra étudier les trajectoires une à une pour chaque valeur de n_2 et de E , pour définir leur ensemble. Nous ne le ferons d'ailleurs que pour le cas des trajectoires du plan $Z = 0$. Cela nous permettra de nous rendre compte des effets d'une dispersion dans l'énergie des particules accélérées et de la valeur de l'indice du champ de fuites sur les trajectoires de sortie; nous pourrons ainsi déterminer si une valeur différente de $n_2 = 40$ eût été plus avantageuse.

Pour les trajectoires gauches nous n'avons cherché qu'à définir la transparence de l'accélérateur vis-à-vis des particules sortant sous différents angles.

Nous présentons ci-dessous les résultats numériques donnant quelques propriétés des trajectoires de particules ayant subi une collision.

6.1. Trajectoires du plan $Z = 0$

Nous avons vu que le plan $Z = 0$ contenait une famille de trajectoires planes dont l'aspect est présenté figure : 7 pour $E = 90$ MeV; $n_2 = 40$, l'angle d'émission variant de 10° en 10° . Nous rappelons que pour une particule négative (électron) et un point de collision situé en $\phi = 2k\pi/N$, nous sommes dans le cas d'un secteur que nous avons appelé F , tandis que pour $\phi = (2k+1)\pi/N$ c'est au secteur D que nous avons affaire.

Nous voyons apparaître clairement sur la figure : 7 les trois groupes de trajectoires :

- 1) Trajectoire sortant vers l'extérieur de l'accélérateur;
- 2) Celles qui sortent par l'intérieur de l'accélérateur, et enfin :

- 3) Celles qui traversent plusieurs secteurs sans sortir. Ces dernières trajectoires seront considérées comme irrécupérables. Nous ne nous en soucierons pas.

Considérons successivement les trajectoires sortant vers l'intérieur puis vers l'extérieur de l'accélérateur.

6.1.1. Trajectoires sortant par l'intérieur de l'accélérateur

Nous rappelons que nous avons défini l'intérieur de l'accélérateur comme l'espace intérieur au cylindre $C_I(r = 0,5)$, et dans lequel comme nous l'avons justifié plus haut nous négligerons la courbure des trajectoires.

Comme nous l'avons déjà remarqué de telles trajectoires subissent un champ ne présentant qu'un seul indice et possèdent de ce fait les propriétés d'homothétie par rapport à l'énergie. Il suffira donc de déterminer la famille correspondant à une énergie ($E = 90$ MeV) pour pouvoir en déduire celles correspondant à un E quelconque.

En tenant compte de cette remarque, nous aurons à l'intérieur de C_I pour un α donné et des E différents une famille de droites parallèles, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\theta(\alpha, E) &\equiv \theta(\alpha, E = 90 \text{ MeV}) \\ \delta(\alpha, E)/\delta(\alpha, E = 90 \text{ MeV}) &= \lambda(E)/\lambda(E = 90 \text{ MeV}) \quad .\end{aligned}\tag{6.1}$$

Ces relations restent vérifiées tant que les écarts en énergie ne produisent pas sur $p/p_0 = F(\alpha, \gamma)$ des erreurs supérieures aux tolérances imposées (cf. chapitre 4). En admettant une erreur de 10^{-5} sur $F(\alpha, \gamma)$ les relations (6.1) restent valables tant que $E > 60$ MeV, ce qui est amplement suffisant pour étudier les écarts dûs aux dispersions en énergie dans l'accélérateur.

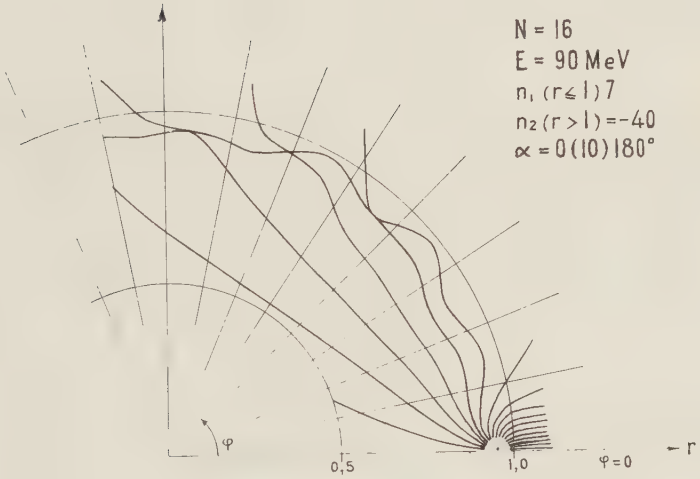
Nous devons remarquer que le calcul numérique s'effectuant jusqu'à un rayon $r = 0,5/\lambda(\gamma)$, cela apporte une différence d'action sur les particules, du fait de sa dépendance vis-à-vis du rayon terminal. Toutefois, comme l'influence du champ magnétique a été considérée comme négligeable pour la plus grande de ces valeurs de r , nous négligerons cette différence.

Les résultats numériques ont confirmé d'ailleurs cette approximation : pour $dE/E (= 90 \text{ MeV}) = 12\%$ les écarts en θ sont au plus égaux à 0,1 degré.

Fig.7

Trajectoires Planes
Plan $z=0$

Secteur F



Secteur D



Si nous considérons les équations du mouvement (4.1), nous voyons que pour $\alpha = k\pi$ nous avons des trajectoires rectilignes passant par l'origine (la particule suit la droite de champ magnétique nul) c'est-à-dire :

$$\theta(\alpha = k\pi, E) \equiv 0$$

$$\delta(\alpha = k\pi, E) \equiv 0$$

Lorsque l'angle s'écarte de la valeur $k\pi$, la particule entre dans une région de champ non nul et subit une déviation qui, suivant le signe du champ et celui de la charge, l'écarte ou la ramène sur le plan $\phi = k\pi/N$ dont elle est partie.

Considérons donc (figure : 7) séparément les cas des secteurs F et D .

Soit le secteur F . Lorsque $(\pi - \alpha)$ croît à partir de la valeur zéro, le champ magnétique repousse l'électron du plan $\phi = 2k\pi/N$ et θ croît en valeurs négatives tandis que δ croît en valeurs positives. Lorsque $(\pi - \alpha)$ devient suffisamment grand pour que la particule pénètre dans le secteur suivant, le champ s'inversant, le rayon de courbure de la trajectoire change de signe. Toutefois, par suite de la décroissance de champ avec la 7^e puissance du rayon la courbure est pratiquement nulle, d'où la croissance monotone de θ avec α ainsi que la décroissance monotone de δ avec α . L'angle $(\pi - \alpha)$ augmentant toujours, nous arrivons à la trajectoire tangente au cylindre $C_I(r = 0,5)$, à partir de laquelle les électrons ne sortiront plus par l'intérieur de l'accélérateur — ceci a lieu évidemment lorsque δ atteint la valeur $|\delta| = 0,5$ et dépend donc de l'énergie que l'on considère. La variation de cette valeur limite de α reste toutefois faible, elle est de 2° pour E variant de 90 à 70 MeV, quant à δ il atteint la valeur de -35° environ.

Passons maintenant au secteur D . Là, la particule sortant vers l'intérieur est attirée par le plan $\phi = (2k + 1)\pi/N$ et il y a refocalisation des trajectoires s'écartant peu ($|180^\circ - \alpha| < 40^\circ$) de l'axe $\varphi = 0$ en r voisin de 0,56, et la relation $\delta(\alpha)$ est pratiquement linéaire avec $\delta > 0$.

Lorsque $|180^\circ - \alpha| > 40^\circ$ le point de recouplement de l'axe $\varphi = 0$ par la trajectoire s'éloigne, et la trajectoire finit par passer par l'origine, ce qui implique que δ après avoir décrû à partir de la valeur zéro s'annule à nouveau puis change de signe. Comme en outre $\delta(\alpha)$ est continu, nous aurons un minimum sur la courbe $\delta(\alpha)$. Entre-temps, l'angle θ passe par un maximum puis décroît. Si nous diminuons encore α la trajectoire finit par péné-

trer dans le secteur suivant, la courbure change de signe tout en gardant cette fois une valeur finie du fait que la valeur r y est encore élevée. θ finit par s'annuler et changer de signe tandis que δ continue à croître et atteint la valeur 0,5. Nous arrivons ainsi de nouveau à la trajectoire limite au-delà de laquelle il n'y a plus de sortie par l'intérieur.

Toutes ces considérations sont résumées quantitativement sous forme d'un graphique (figure : 8) qui donne l'angle θ et la distance δ en fonction de l'angle de recul α . Nous voyons que les sorties vers l'intérieur ne peuvent avoir lieu que pour :

$$|180^\circ - \alpha| \leq \begin{cases} 82^\circ,5 & \text{Secteur } D \\ 18^\circ & \text{Secteur } F \end{cases} ,$$

pour le secteur F les relations $\theta(\alpha)$ et $\delta(\alpha)$ sont biunivoques avec une bonne résolution $d\theta/d\alpha > 1$, tandis que pour le secteur D ces relations cessent d'être biunivoques tout en gardant une résolution raisonnable $d\theta/d\alpha \cong 1$ pour α extérieur à l'intervalle $[125^\circ; 135^\circ]$, c'est-à-dire en dehors du maximum. Pour lever l'indétermination sur $\alpha(\theta)$ il suffit de tenir compte de la relation $\alpha(\delta)$ en même temps.

Nous allons maintenant étudier les trajectoires sortant vers l'extérieur.

6.1.2. Trajectoires sortant vers l'extérieur de l'accélérateur

Nous avons tenu, avant de présenter les résultats, à justifier l'utilisation dans nos calculs du champ $H_0(R)$ défini par l'équation (3.9). Comme nous l'avons vu, ce champ présente un point anguleux pour $R = R_0$, et n'est pas physique. L'attrait de son utilisation réside dans la simplicité de son expression et de sa programmation — d'où une économie sensible du temps de la calculatrice. Nous avons voulu estimer l'importance de l'introduction d'un changement dans la loi du champ, et avons choisi pour cela un champ $H_T(R)$ (cf. équation : 3.10 présentant deux points anguleux.)

Nous allons comparer quatre champs différents; mais avant de donner la raison de leur choix, nous poserons pour tout ce qui suit, dans le but d'abrégier les écritures :

$$A_i(a; b) = \int_a^b H_i(R) dR \quad .$$

Fig. 8

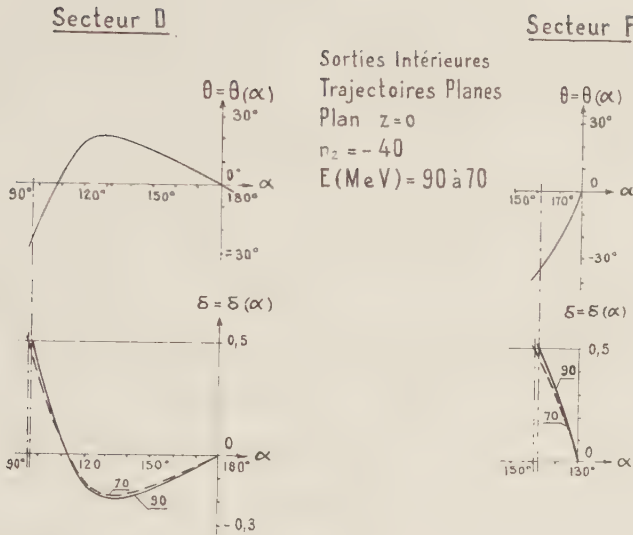
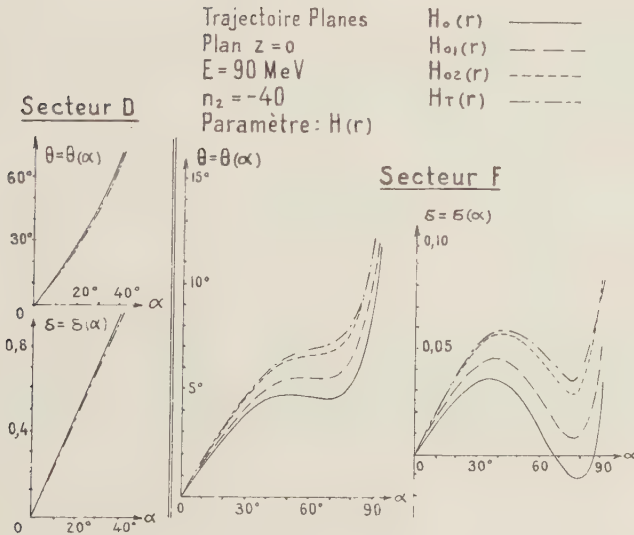


Fig. 9



Ces quatre champs sont :

1. $H_0(R) = H_0 h_0(R)$ champ (cf. équation : 3.9) que nous nous proposons d'utiliser dans nos calculs.
2. Le champ maxwellien $H_M(R) = H_0 h_M(R)$ (cf. équation : 3.8) Nous vérifions, numériquement, que pour $n_1 = 7$, $n_2 = -40$, et $w = 0,001$, les écarts relatifs de $h_M(R)$ sont inférieurs à 10^{-5} par rapport aux expressions suivantes :

$$\begin{aligned} h_M(R \leq 0,988 R_0) &= 1,00762(R/R_0)^7 \\ h_M(R > 1,014 R_0) &= 1,09347(R/R_0)^{-40} \end{aligned}$$

Définissons $h_A(R)$ par :

$$h_A(R) = \begin{cases} 1,00762 (R/R_0)^7 & \text{pour } R \leq R_0 \\ 1,09347 (R/R_0)^{-40} & \text{pour } R > R_0 \end{cases}$$

Nous aurons dès lors l'inégalité suivante :

$$0 \leq h_0(R) \leq h_M(R) \leq h_A(R) \quad ,$$

ce qui permet d'écrire :

$$\left| \frac{A_M(0; \infty) - A_0(0; \infty)}{A_0(0; \infty)} \right| \leq 0,0222 \quad ,$$

c'est-à-dire que l'écart de $A_M(0; \infty)$ par rapport à $A_0(0; \infty)$ est inférieur à 2,22%. Ceci nous fixe l'ordre de grandeurs des écarts. Nous avons par conséquent pris $H_{01}(R) = H_{01} \cdot h_0(R)$ tel que :

$$A_{01}(0; \infty) = (1 - 0,0222) A_0(0; \infty) \quad .$$

3. Nous lui avons comparé, $H_T(R)$ tel que :

$$A_{01}(0; \infty) = A_T(0; \infty) \quad .$$

4. Comme une particule soumise à un champ $H_i(R)$, et sortant vers l'extérieur de l'accélérateur à partir de la coordonnée R_c du point de collision, ne subit de $A_i(0; \infty)$ que $A_i(R_c; \infty)$ nous avons comparé $H_T(R)$ à $H_{02}(R) = H_{02} \cdot h_0(R)$ défini tel que $A_{02}(R_c; \infty) = A_T(R_c; \infty)$.

Les résultats de ces quatre études sont présentés figure : 9. Nous remarquons immédiatement que pour le secteur D les paramètres des trajectoires sont assez peu sensibles aux petits écarts dans la valeur et la forme du champ. Le secteur F , lui, y est beaucoup plus sensible; il suffit toutefois que les $A_i(R_c; \infty)$ soient les mêmes pour que les écarts dans la valeur des paramètres de sortie redeviennent négligeables : en effet pour $H_{02}(R)$ et $H_T(R)$ dont les $A_i(R_c; \infty)$ sont égaux, les écarts des θ ne dépassent pas 0,4 degrés, tandis que ceux des δ sont inférieurs à 0,007. Nous en concluons qu'une particule qui rencontre sur sa trajectoire une valeur déterminée de $A(R_c; \infty)$ possède en première approximation des paramètres de sortie bien définis et cela indépendamment du nombre (un ou deux) des points anguleux que présente le champ.

Nous en avons conclu que nous pouvions définir en première approximation la valeur des paramètres de sortie des trajectoires pour un champ maxwellien à l'aide d'un champ en $H_0(R)$ choisi tel que :

$$A_M(R_c; \infty) = A_0(R_c; \infty) \quad .$$

Discussion de la forme des trajectoires

Nous voyons figure : 7 l'allure générale des trajectoires sortant vers l'extérieur.

Pour le secteur D nous voyons que les trajectoires s'écartent de plus en plus du plan $\varphi = 0$ et se rapprochent du secteur suivant au fur et à mesure que α croît. θ et δ augmentent donc avec α jusqu'à ce que les trajectoires entrent dans la région du secteur suivant à champ de fuites non nul. Ce dernier leur imprime des courbures de signe contraire et d'autant plus importantes que les trajectoires se rapprochent du cylindre $r = 1$.

θ et δ passent donc par un maximum et leur valeur respective diminue. Cet état de fait persiste jusqu'à ce que les trajectoires pénètrent dans le 3^e secteur qui interviendra tout comme le 2^e secteur mais dans le sens contraire. Nous n'insisterons pas sur cette seconde remontée de la valeur de θ et δ , car les trajectoires sortant par le 3^e secteur seront considérées irrécupérables. Si nous considérons au lieu de $n_2 = -40$ et $E = 90$ MeV, soit des particules à énergie plus faible, soit des champs à indice moins élevé ($n_2 > -40$), les courbures s'en trouveraient augmentées et les allures

de θ et δ plus prononcées par rapport à α . Nous le constatons effectivement pour les énergies figure : 10 et pour les indices figure : 12.

Dans le cas du secteur F , les particules sont déportées vers le plan $\varphi = 0$ et nous assistons à une focalisation des trajectoires. θ et δ augmentent progressivement avec α , puis en deviennent presque indépendants, jusqu'à ce que les trajectoires franchissent le ventre du champ ($\varphi = \pi/2N$) par la suite θ et δ reprennent leur croissance avec α . Plus l'énergie est faible (particules molles) ou le champ de fuites intense (n_2 grand), plus les trajectoires sont ramenées vers le plan $\varphi = 0$, et θ de même que δ peuvent, après avoir atteint le maximum, diminuer, s'annuler et changer de signe, puis passer par un minimum avant de reprendre leur allure croissante avec α . Si l'énergie ou l'indice sont suffisamment faibles, θ et δ pourront commencer par décroître à partir de $\alpha = 0$, passer par un minimum, pour reprendre enfin l'allure croissante. Les paramètres $\theta(\alpha)$ et $\delta(\alpha)$ sont présentés pour différentes énergies E à $n_2 = -40$ figure : 11 et pour différents indices à $E = 90$ MeV figure : 13.

La figure : 9 (courbes pleines) présente les résultats pour $n_2 = -40$ et $E = 90$ MeV. Nous attirons l'attention sur le fait que les résultats numériques concernant $\theta(\alpha; n_2)$ et $\delta(\alpha; n_2)$, obtenus pour le secteur F , peuvent être résumés par les deux formules empiriques suivantes :

$$[\theta(\alpha; n_2; E = 90 \text{ MeV}) - \theta(\alpha; n_2 = -\infty; E = 90 \text{ MeV})]n_2 = m_\theta(\alpha)$$

$$\text{et } [\delta(\alpha; n_2; E = 90 \text{ MeV}) - \delta(\alpha; n_2 = -\infty; E = 90 \text{ MeV})]n_2 = m_\delta(\alpha) \quad ,$$

où $m_\theta(\alpha)$ et $m_\delta(\alpha)$ sont indépendants de n_2 pour $|\alpha| \leq 100^\circ$, et ceci avec une erreur relative moyenne de moins de 5,6 % et 6,6 % respectivement.

Cette propriété permet de déduire par simple règle de trois la paire de courbes $\theta(\alpha)$ et $\delta(\alpha)$, correspondant à un indice de champ de fuites quelconque, à partir de la connaissance simultanée de la paire $\theta(\alpha)$ et $\delta(\alpha)$ correspondant à $n_2 = -\infty$, et d'une autre paire définie pour un indice fini quelconque, par exemple $n_2 = -40$.

Remarques concernant les résultats :

Pour l'utilisation optimum de l'accélérateur, nous chercherons pour le faisceau sortant une séparation maximum par rapport aux α , afin de pouvoir effectuer avec une bonne résolution des mesures directes sur les parti-

cules sortantes. Les conditions de bonnes résolutions sont satisfaites dans le cas du secteur défocalisant ($|\alpha| < 40^\circ$) et pour certains angles du secteur focalisant ($|\alpha| \lesssim 90^\circ$). Pour le reste du faisceau sortant du secteur focalisant, nous chercherons, par un choix approprié des valeurs des paramètres de l'accélérateur, à obtenir une collimation maximum afin de pouvoir transporter le faisceau jusqu'à un analyseur magnétique, et/ou, électrostatique assurant la résolution du faisceau suivant ses composantes. Une telle attitude nous a paru utile pour les raisons suivantes :

- 1) pour le secteur focalisant la résolution décroît avec l'accroissement de n (< -30),
- 2) pour $n \geq -30$ il y a déjà confusion des énergies sortant au même angle θ ,
- 3) physiquement il n'est pas concevable de réaliser un champ ayant une décroissance trop brutale (nous avons constaté en effectuant des mesures sur un modèle plan que la valeur de $n \cong -40$ est physiquement réalisable; un tel indice délivre les particules à $|\theta| \leq 5^\circ$ pour $|\alpha| \leq 80^\circ$, la résolution à l'origine $(d\theta/d\alpha)_{\alpha=0}$ est de l'ordre de 0,145) et
- 4) la dispersion en énergie des particules avant la collision tend à embrouiller les mesures qui se trouvent déjà à la limite des possibilités de résolution expérimentale.

Nous chercherons donc l'indice n dont les courbes $\theta(\alpha)$ et $\delta(\alpha)$ se confondraient (dans le cas idéal) avec l'axe des α . Incidemment cela donne en même temps une meilleure résolution de sortie pour $|\alpha| \gtrsim 90^\circ$ (qui pourra aller jusqu'à $|\alpha| \gtrsim 80^\circ$) angles auxquels des mesures directes pourront être effectuées sur les trajectoires sortantes.

Comme une telle collimation ne sera recherchée que pour le cas du secteur focalisant et des angles α compris entre $\pm 90^\circ$, nous pourrions avoir recours à l'expression empirique de $\theta(\alpha; n_2; E = 90)$ pour choisir le n_2 donnant la focalisation optimum.

Le critère décidant du choix de n_2 sera fondé sur les considérations suivantes :

Les trajectoires asymptotes sont définies par θ et δ , ce qui, à une distance $\Delta = D/R_0 > 1$ du centre de l'accélérateur, les place à une distance d de l'axe des φ correspondant. Cette distance d s'écrit en fonction des grandeurs susmentionnées :

$$d/R_0 = \theta\Delta + \delta \quad .$$

Trajectoires Planes
 Plan $z=0$
 Paramètre: $E(\text{MeV})$
 $n_2 = -40$

Fig.10
Secteur D

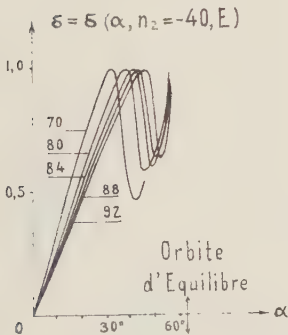
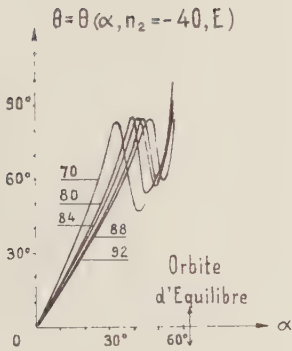
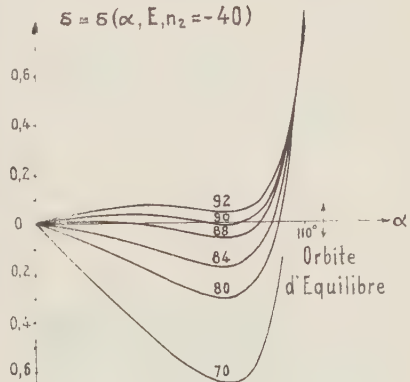
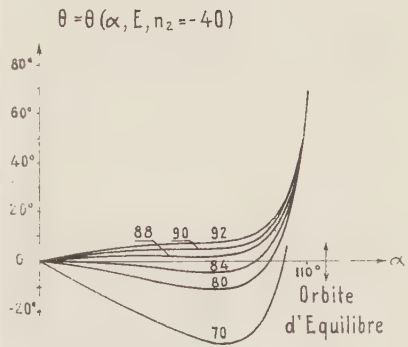


Fig.11
Secteur F



Trajectoires Planes
 Plan $z=0$
 Paramètre : n_2
 $E = -90 \text{ MeV}$

Fig.12
Secteur D

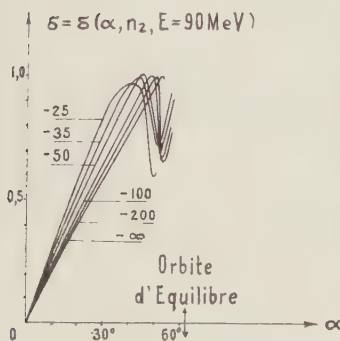
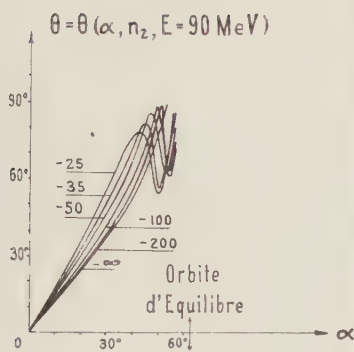
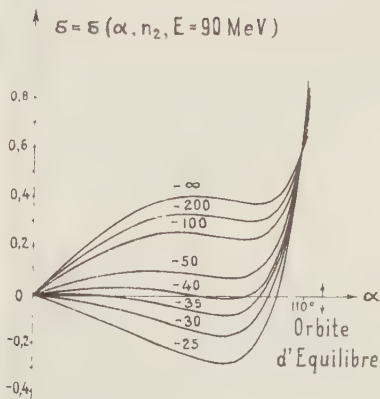
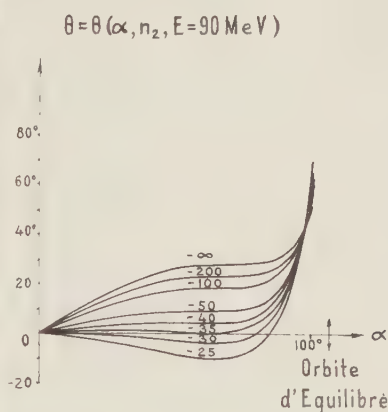


Fig.13
Secteur F



La largeur des lentilles et aimants de transport étant en pratique limitée, nous dirons que le n_2 est optimum si pour un intervalle $(-\alpha_0; \alpha_0)$ maximum, il donne une borne supérieure de $|d|$ minimum. Si nous portons sur un graphique $d = d(\alpha, n_2)$ pour un Δ donné (pour $\Delta = 2$ voir figure : 14a), nous voyons pour l'intervalle de n_2 et de α considéré que $d(\alpha)$ présente un ou deux extrêum. Nous pouvons donc définir deux types d' α : 1) Un α_0 définissant l'intervalle tel que $|d(|\alpha| \leq \alpha_0)| \leq d_{\max.}$; 2) Un α_0 définissant un intervalle tel que $|d(|\alpha| \leq \alpha_0)| \leq |\bar{d}|$, la plus grande des deux valeurs $d_{\max.}$, et $d_{\min}$ pris en valeur absolue.

Nous représentons, figure : 14b, $|\bar{d}|$ en fonction de n_2 . Cette quantité est représentée par les deux courbes correspondant à $d_{\max}(n_2)$ et $-d_{\min}(n_2)$, le point d'intersection de ces deux courbes définit par la valeur de son abscisse le n_2 optimum (que nous appellerons $\hat{n}_2$) et donne la plus faible valeur de $|\bar{d}|$ pour le Δ considéré. Nous appellerons l'ordonnée : $\hat{d}$. Nous portons sur le même graphique (en pointillé) les deux courbes $\alpha_0(n_2)$ correspondant respectivement à $d_{\max}(n_2)$ et à $-d_{\min}(n_2)$, et nous appellerons $\hat{\alpha}_0$ la valeur de l'ordonnée du point d'intersection de ces deux courbes.

Nous voyons par ce graphique que pour $\Delta = 2$ il n'est pas intéressant (d'après le critère que nous venons de définir) de prendre $n_2 < -34,4$; en effet, à une même demi-ouverture d correspond pour $n_2 > -34,4$ un intervalle α_0 supérieur à celui du $n_2 < -34,4$ et défini par le même d . Nous dirons que pour $\Delta = 2$ la valeur optimum de $n_2 = \hat{n}_2 = -34,4$. Le graphique : 15 présente $\hat{n}_2$ (optimum) ainsi que les $\hat{d}$ et $\hat{\alpha}_0$ qui lui correspondent en fonction de l'éloignement Δ à la machine.

Remarquons que n_2 reste assez insensible aux variations de Δ , ce qui permet de dire qu'il suffira d'obtenir un champ de fuite tel que n_2 soit d'environ -34 .

Etudions à présent les trajectoires dans les plans $\phi = k\pi/N$.

6.2. Trajectoires des plans $\phi = k\pi/N$

A part la famille des trajectoires du plan $Z = 0$, nous avons montré l'existence de celles des plans $\phi = k\pi/N$. L'aspect des trajectoires dans ces plans, obtenues par résolution numérique des équations du mouvement, montre, figure : 16, leur complexité.

Considérons tout d'abord les sorties vers l'extérieur. Comme nous pouvions nous y attendre, nous avons pour le secteur F un étalement divergent des trajectoires donnant, comme le montrent les courbes E de la figure : 17, une bonne résolution $d\theta/d\alpha > 1$. Nous avons aussi présenté sur la même figure les côtes à la distance $\Delta = 1,5$ de l'axe de l'accélérateur, auxquelles passent les trajectoires de différents α . Nous constatons que là aussi la résolution est bonne.

Pour le secteur D les particules sont légèrement focalisées vers l'extérieur et nous assistons à un recouplement des trajectoires. Les paramètres de sortie sont donnés par les courbes E figure : 18 qui montrent que la relation $\alpha(\theta)$ devient multivoque. Pour lever l'indétermination il faut recourir en même temps à $d(\alpha)$.

Nous remarquons que les sorties extérieures sont limitées à $|\alpha| \leq 35^\circ$ pour le secteur F , et à $|\alpha| \leq 105^\circ$ pour le secteur D .

Considérant à présent les trajectoires vers l'intérieur, nous voyons (figure : 16) que la complexité de leurs formes les rendent très susceptibles d'être arrêtées par un objet opaque. En effet, il suffit que les bobines d'excitation des aimants aient leurs enroulements des plans $\phi = k\pi/N$ situés de façon à couper l'une des enveloppes de ces courbes, que l'on devine aisément (figure : 16) sur les familles des trajectoires de chaque secteur, pour que l'intensité des particules sortantes s'en trouve sérieusement diminuée. Dans le cas du secteur F si nous évitons la région $z \leq 1,1$ (c'est-à-dire si pour $R_0 = 2,775$ les bobines sont placées à une cote $Z = 30$ cm environ, de part et d'autre du plan $Z = 0$) les sorties du secteur F sont possibles pour $|180^\circ - \alpha| \leq 70^\circ$; si nous évitons l'enveloppe en inclinant les bobines de façon à les mettre à environ $z = 0,1$ pour $r = 1,0$ et à $z = 0,2$ pour $r = 0,5$, nous pourrions observer toutes les trajectoires ($|180^\circ - \alpha| \leq 145^\circ$) du secteur F . Une telle disposition reste insuffisante pour le secteur D qui requiert une inclinaison légèrement plus prononcée pour permettre la sortie à des angles α tels que $|180^\circ - \alpha| \leq 50^\circ$.

Les dispositions assurant de telles sorties entraînent toutefois des pièces polaires s'étendant sur un volume supplémentaire, et influent sensiblement sur la masse de fer de l'aimant. Au cas où c'est la dernière considération qui l'emporte et où les bobines sont placées à une cote inférieure à $z = 0,1$, les sorties intérieures du secteur D sont réduites à quelques degrés de part et d'autre de $\alpha = 180^\circ$. La situation reste légèrement plus favorable au

Fig. 14

Trajectoires Planes
Plan $z=0$
Secteur F
 $E=90$ MeV
Paramètre : n_z
 $\Delta=2$

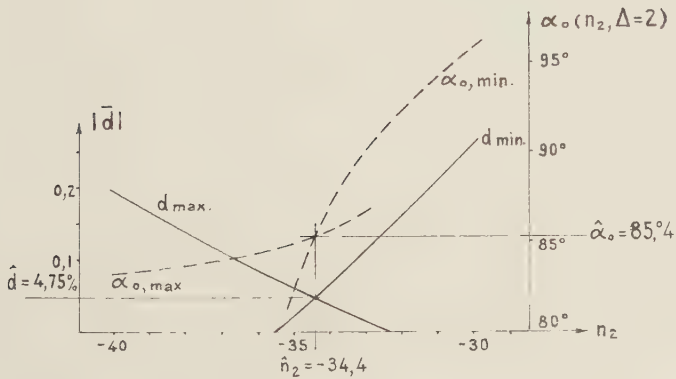
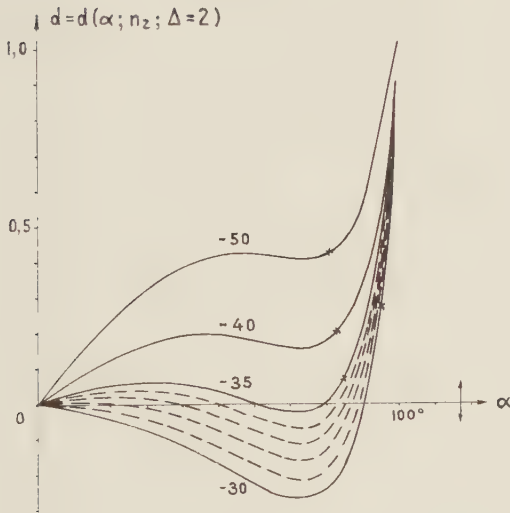


Fig. 15

Caractéristiques extérieures
de l'accélérateur en fonction de la
distance à ce dernier.

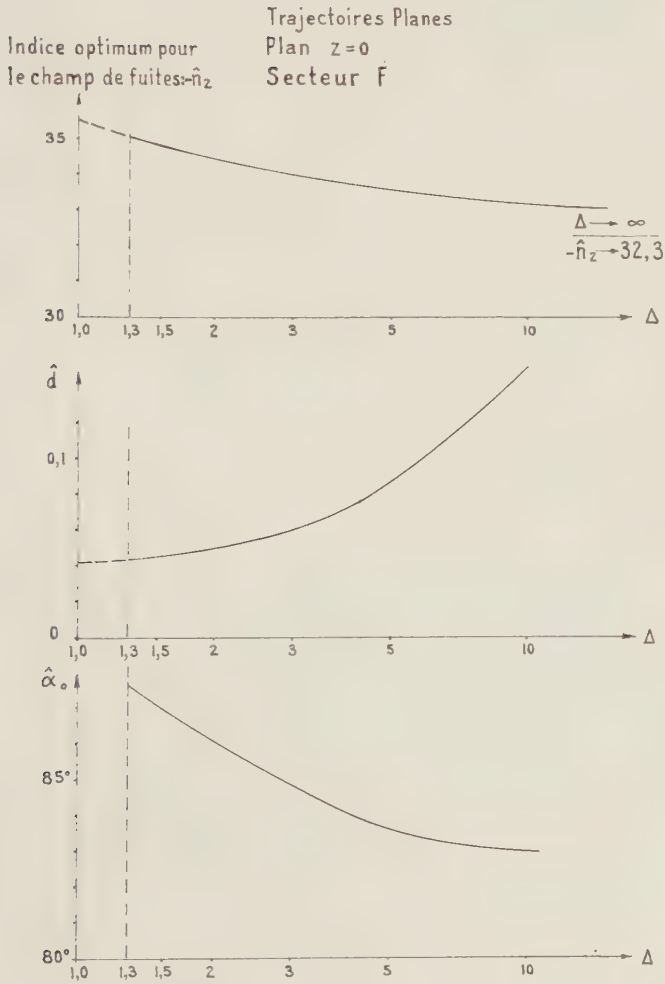
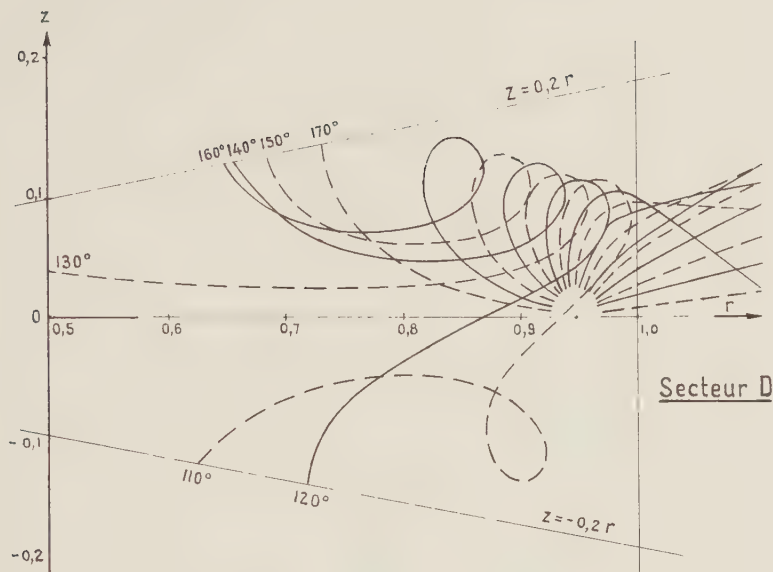
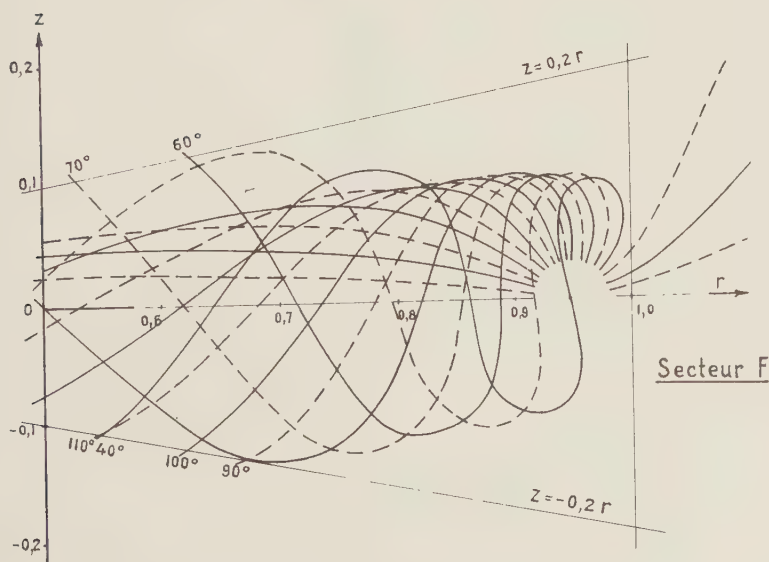


Fig. 16



Secteur D

Trajectoires Planes Plan $\varphi = k\pi/N$
 $N=16$ $E=90$ $n_1=7$ $n_2=-40$



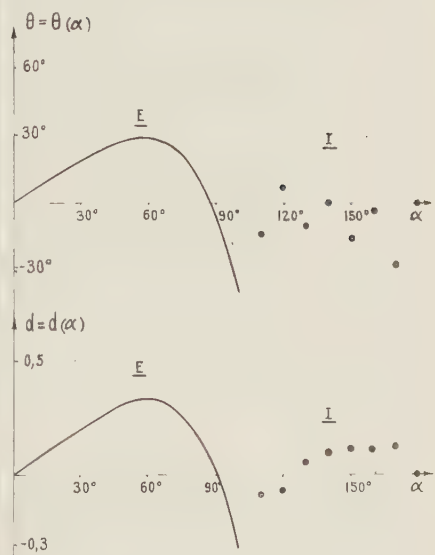
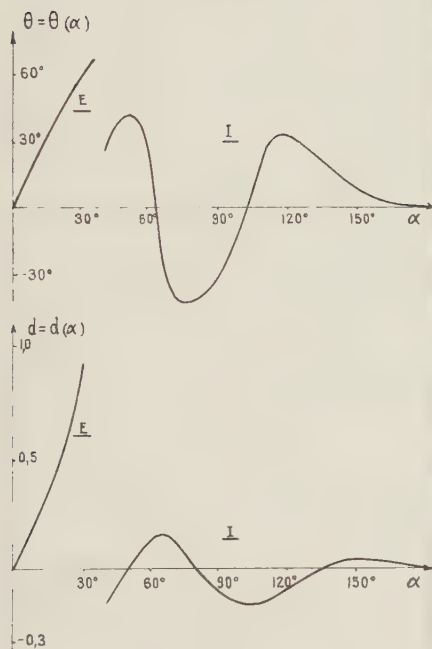
Secteur F

Fig.17

Fig.18

Trajectoires Planes

Plan $\varphi = k\pi/N$ $E = 90 \text{ MeV}$; $n_2 = -40$

$$\Delta \begin{cases} 0,5 \text{ pour la courbe} \\ \text{sortie interieure: I} \\ 1,5 \text{ pour la courbe} \\ \text{sortie exterieure: E} \end{cases}$$
Secteur FSecteur D

secteur F où à $z = 0,1$, nous aurons encore des sorties à $|180^\circ - \alpha| \leq 65^\circ$ et à $z = 0,05$ pour $|180^\circ - \alpha| \leq 30^\circ$. Ces remarques s'appliquent à l'intensité globale de sortie intérieure. En revanche, il faut abandonner tout espoir de pouvoir faire des corrélations $\alpha(\theta)$ dans le secteur D (courbe : I de la figure : 18, et aspect général des trajectoires figure : 16); pour le secteur F cette résolution reste problématique.

6.3. Trajectoires gauches

Pour les trajectoires gauches, nous avons cherché à délimiter l'angle solide à la collision permettant la sortie des particules de l'accélérateur, compte tenu de l'opacité des pièces polaires et de celle de la chambre à vide.

Nous avons considéré comme perdue toute particule atteignant la surface délimitant les pièces polaires. Quant à la chambre à vide, nous l'avons considérée comme délimitée latéralement par les deux cylindres $r = 1$ et $r = 0,5$ dont les bases sont les couronnes correspondant aux plans définis par $z = \hat{z}$. Nous avons supposé en outre que ces bases étaient opaques aux trajectoires tandis que les parois latérales leur étaient transparentes.

Pour la présentation des résultats du calcul numérique nous avons fait appel à la sphère unité centrée au point de la collision envisagée et nous avons associé à chaque trajectoire de recul le point de cette sphère auquel la tangente à l'origine de la trajectoire perce cette sphère. Ce point est défini par les deux angles orientés : latitude « l » et longitude « L » comptés dans le sens direct respectivement à partir du plan $Z = 0$ et du plan $\phi = k\pi/N$, il suffit de connaître les résultats pour le quart de sphère défini par $0 \leq l \leq 90^\circ$ et $0 \leq L \leq 180^\circ$ pour les compléter dans tout l'espace par double symétrie.

Pour présenter les résultats relatifs à la transparence des pièces polaires, nous avons cherché à définir sur cette sphère la courbe sphérique séparant les émissions entraînant la perte des particules contre les parois des pièces polaires, de celles permettant une sortie, en supposant une chambre à vide transparente aux particules.

La figure : 19 présente les résultats numériques obtenus pour trois valeurs différentes de U : 1) $U = U_1 = 2,6 \cdot 10^5$ Ampères-tours; 2) $U = U_2 = U_1/\sqrt{10}$; 3) $U = U_3 = 0,1 U_1$.

Nous avons présenté en coordonnées polaires les deux quarts de sphère relatifs aux secteurs F (demi-cercle gauche) et D (demi-cercle droit); la colatitude étant représentée par la coordonnée radiale et la longitude par la coordonnée angulaire. Nous avons présenté en noir les émissions entraînant des pertes contre les pièces polaires pour $U = U_1$, et en gris les pertes supplémentaires pour $U = U_2$. Enfin, nous avons porté la courbe délimitant les pertes correspondant à $U = U_3$. L'allure de ces courbes de séparation confirme ce que nous devons prévoir : les sorties s'effectuent principalement autour des plans $Z = 0$ et $\phi = k\pi/N$, plans contenant nous l'avons vu des trajectoires planes, qui ne peuvent être arrêtées par les pièces polaires même lorsque $U \rightarrow 0$. Nous trouvons ici une justification de l'étude poussée consacrée aux trajectoires de ces plans.

Nous présentons sur ce même graphique (figure : 19) une famille de courbes en pointillé; ces courbes séparent les émissions donnant lieu à des trajectoires dont l'écart par rapport au plan $Z = 0$ pour $0,5 \leq r \leq 1,0$ ne dépasse à aucun moment $\hat{z}$, de celles pour lesquelles cet écart dépasse $\hat{z}$, en un point quelconque de la trajectoire comprise entre $r = 0,5$ et $r = 1,0$. Ces courbes qui correspondent à $\hat{z}$, dont la valeur en $^0/_{00}$ est inscrite sur la figure : 19, introduisent les pertes supplémentaires contre les parois supérieure et inférieure de la chambre à vide.

Pour présenter quantitativement ces résultats, nous avons calculé l'angle solide à l'émission entraînant une sortie des particules, et appelé le rapport de cet angle aux 4π stéradians, la Transparence « T » de l'accélérateur donné.

Nous avons étudié en particulier la transparence T_E relative aux sorties vers l'extérieur, T_I celle de sortie par l'intérieur, et la transparence totale $T_T = T_E + T_I$. Ces transparences ont été calculées en fonction de $\hat{z}$ pour $u_0 = 0,100; 0,032; 0,010$ pour le secteur F (cf. figure : 20); pour le secteur D (cf. figure : 21) seul T_E a pu être évalué en fonction de $\hat{z}$; pour T_I , et par là T_T , seule la valeur limite de T a pu être estimée. Nous voyons sur ces figures : 20 et 21 que la transparence après une variation quasi linéaire tend asymptotiquement vers sa valeur limite. Cela devient évident lorsque nous considérons figure : 19 la façon dont les courbes délimitant les pertes contre les parois tendent vers la droite définie par $L = 0$, ce qui fait que l'apport résultant d'un accroissement de la hauteur de la chambre à vide tend vers zéro. Ce comportement asymptotique de $T(\hat{z})$ est d'autant plus marqué que la valeur de u_0 est faible.

Fig. 19.

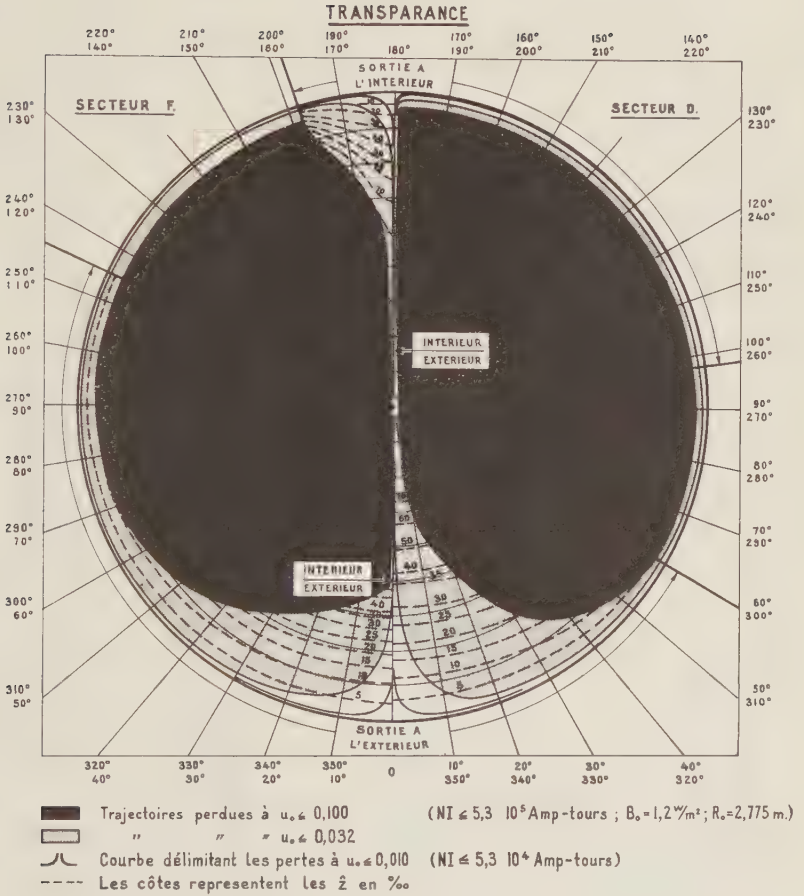


Fig. 20

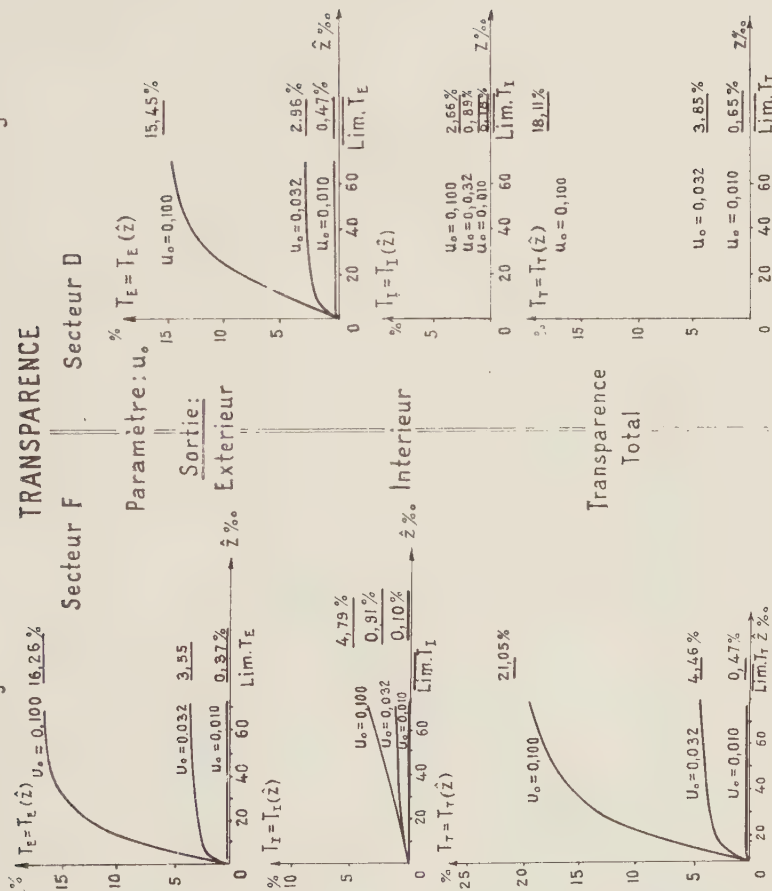
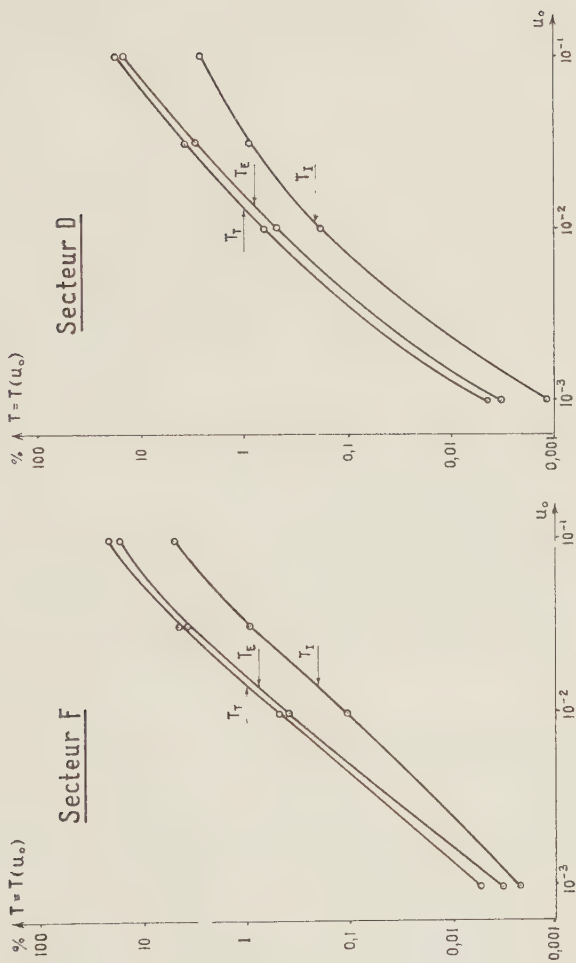


Fig. 21

Fig. 22

TRANSPARENCY LIMIT



Pour terminer nous présentons les valeurs limites des quantités T_E , T_I et T_T en fonction de u_0 sur un graphique à échelle doublement logarithmique (cf. figure : 22). Nous voyons que la variation de T_E , et par là celle de T_T aussi (vu que $T_I \ll T_E$) est approximativement en u^2 . Ce graphique nous est utile pour estimer la valeur qu'il faut prendre pour U pour obtenir une transparence donnée.

6.4. Effets des dimensions finies du faisceau

Tout faisceau physique possède des dimensions transversales finies, qui donnent naissance à des collisions dans tout le voisinage du point théorique (P_E) d'intersection des orbites d'équilibre correspondant à l'énergie considérée. Pour estimer l'importance de l'effet de telles collisions sur les paramètres de sortie, nous avons étudié des collisions ayant lieu sur le cercle du plan $z = 0$ et de rayon OP_E , mais décalées azimuthalement par rapport à P_E d'un angle φ_0 . Nous avons supposé dans le calcul, que la quantité de mouvement du centre de masse était identiquement la même que celle correspondant aux particules décrivant les orbites d'équilibre : en effet la composante de la quantité de mouvement normale à l'orbite d'équilibre, due aux oscillations bétatroniques, est d'une part nulle pour le maximum des déplacements latéraux, et d'autre part, son amplitude maximum reste faible par rapport à la composante le long de l'orbite d'équilibre; cela justifie à nos yeux notre approximation.

Nous avons défini (figure : 23) les faisceaux du plan $Z = 0$ correspondant aux particules ayant subi une collision en un point dont l'écart azimuthal par rapport à P_E est inférieur, en valeur absolue à $\varphi_0 = 0,01$ radians; pour notre accélérateur ($N = 16$, $n_1 = 7$) un tel écart représente (à une énergie de 90 MeV) une demi-largeur de faisceau d'environ $4,5^{0/00}$ du rayon R_0 de l'accélérateur, ce qui pour $R_0 = 3$ mètres donne un faisceau d'une largeur totale de 2,7 cm.

Les résultats quantitatifs relatifs à de telles collisions sont présentés figure : 24. Nous y retrouvons pour les deux secteurs D et F les courbes $\theta(\alpha)$ et $\delta(\alpha)$ correspondant aux cinq valeurs de φ_0 :

$$\varphi_0 = 0 ; \pm 0,005 ; \pm 0,010 \quad .$$

Les écarts des courbes $\theta(\alpha)$ et $\delta(\alpha)$ correspondant à $\varphi_0 \neq 0$ par rapport à celles définies pour $\varphi_0 = 0$, nous apparaissent clairement comme linéaires par rapport à φ_0 , dans les limites considérées. Cela nous permet d'estimer la dispersion dans les valeurs de θ et de δ créée par des dimensions transversales données du faisceau.

Fig. 23

Trajectoires Planes

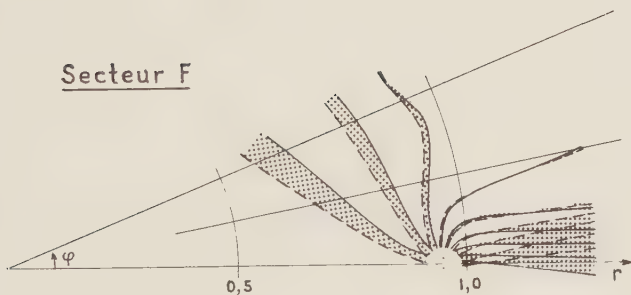
Plan $Z = 0$

$E = 90 \text{ MeV}$

$n_2 = -40$

$\varphi_0 \begin{cases} 0,01r & \text{——} \\ -0,01r & \text{---} \end{cases}$

Secteur F



Secteur D

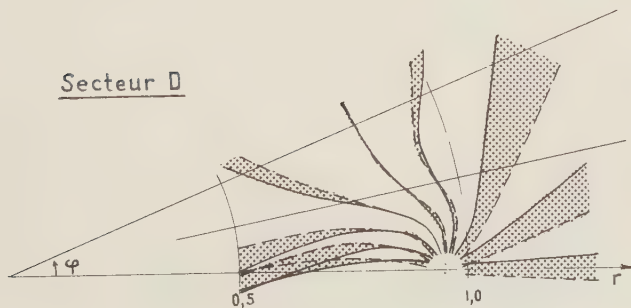


Fig. 24

Trajectoires Planes

Plan $z=0$

$E=90 \text{ MeV}$

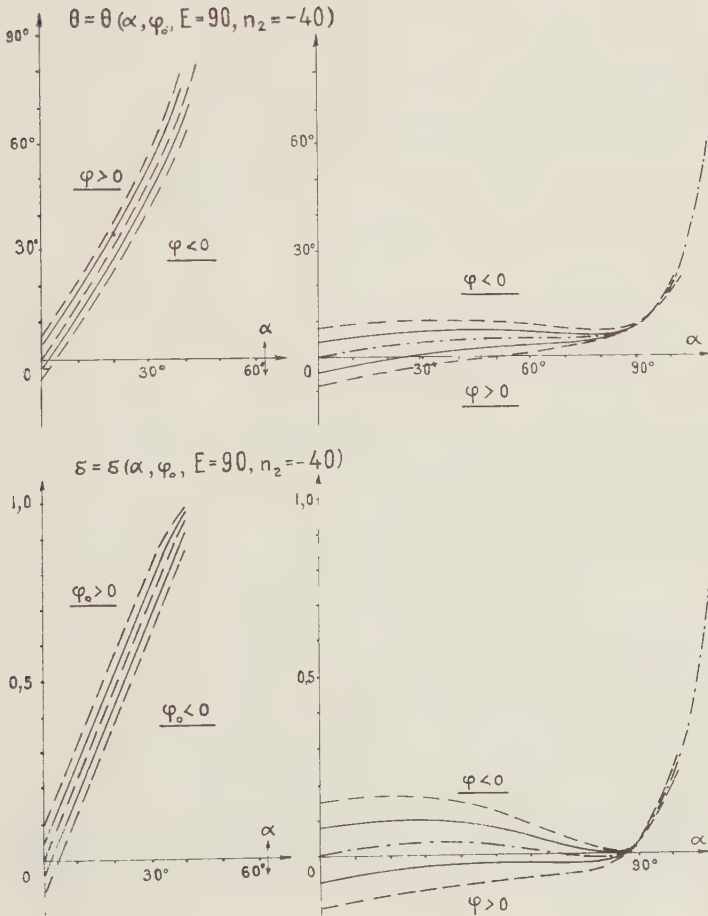
$n_2 = -40$

Paramètre : φ_0

Secteur D

$$\varphi_0 = \begin{cases} 0 \\ \pm 0,005 \\ \pm 0,01 \end{cases}$$

Secteur F



CONCLUSION

Nous remarquons que dans le cas de bien des systèmes de coordonnées, la topographie magnétique dans l'espace correspondant à des conditions aux limites données, peut être rattachée à un champ scalaire dont dérivent les champs des potentiels vecteur $\vec{A}$ et scalaire U , ainsi que celui de l'induction magnétique $\vec{B}$. Nous avons précisé les conditions devant être satisfaites par le système de référence pour permettre une telle simplification, les équations de définition de ce champ scalaire, et la façon dont en dérivent les paramètres magnétiques :

$$\vec{A}, U, \text{ et } \vec{B}.$$

Nous avons rappelé brièvement que, pour permettre une accélération de particules sur des orbites d'équilibre planes et stables vis-à-vis des oscillations bétatroniques au cours de l'accélération, nous devons astreindre les conditions aux limites du champ magnétique à certaines restrictions. Nous avons montré que pour obtenir une telle stabilité il suffisait d'avoir un accélérateur à plan de symétrie, à secteurs radiaux, et à indice de champ constant dans la région de ses orbites d'équilibre. Enfin, nous avons remarqué que le champ devant s'annuler à l'infini, nous devons admettre l'existence de deux régions au moins : la région d'accélération et la région du champ de fuites — d'où une variation radiale de l'indice.

Nous avons alors établi l'expression en coordonnées cylindriques du champ scalaire définissant la topographie magnétique dans l'espace, en tenant compte de la variation de l'indice avec le rayon. Pour le cas d'indices constants, d'un intérêt particulier pour les accélérateurs, nous avons montré que les solutions se réduisent à des formes analytiques : fonctions hypergéométriques de Gauss. Pour l'évaluation numérique de ces fonctions nous avons établi une borne supérieure à l'erreur commise en fonction du nombre de termes retenus de la suite hypergéométrique. Il apparaît que dans le

cas où la valeur constante de l'indice appartient à l'ensemble des entiers, la topographie du champ peut s'écrire sous la forme de fonctions analytiques simples, dont nous avons précisé la forme.

Ayant assimilé la loi du champ de fuites à celle d'un champ à indice constant, nous avons été conduit à considérer une région que nous avons appelée zone de transition, qui permet de raccorder au sens maxwellien les deux régions à indices constants de valeurs différentes. Parallèlement au raccordement analytique rigoureux, nous avons présenté, pour la définition des pièces polaires, une méthode moins rigoureuse mais plus directe au point de vue calcul, conduisant à un tel raccordement.

Pour l'étude de l'optique de sortie de l'accélérateur nous avons considéré le champ hypothétique à deux indices constants et distincts, après en avoir justifié l'utilisation. Nous avons supposé pour le champ une variation azimutale sinusoïdale. Dans un tel champ, les particules des faisceaux inverses se croisent à un angle non nul. Deux familles de trajectoires planes apparaissent : celle du plan « équatorial » des orbites d'équilibre ou plan de symétrie de la machine, et celle des plans « méridiens » ou plans normaux au plan équatorial le long des nœuds du champ.

La résolution numérique des équations du mouvement des particules a permis d'établir que la plupart des sorties avaient lieu au voisinage de ces plans privilégiés, à trajectoires planes. Nous avons estimé la part des particules qui arrivait à sortir de l'accélérateur après la collision en tenant compte des pertes contre les pièces polaires correspondant à différentes équipotentielles, et contre les parois supérieures et inférieures de chambres à vide de différentes hauteurs.

Nous avons étudié les paramètres : direction et position permettant de définir les trajectoires planes (qui sont des droites une fois la particule sortie de l'accélérateur) en fonction de l'angle de recul de la particule à la collision.

Les résultats de ces calculs numériques, que nous présentons graphiquement, sont discutés et montrent que l'exploitation des trajectoires dans les plans méridiens est très délicate, la corrélation entre les directions de sortie et celles à la collision n'étant pas univoque. Cela est particulièrement vrai des sorties par l'intérieur de l'anneau de l'accélérateur. Pour les sorties vers l'extérieur de l'anneau, nous observons alternativement dans le plan équatorial des éventails de trajectoires à bonne résolution angulaire, suivis

de ceux à bonne focalisation. Nous avons d'ailleurs étudié l'effet de la valeur de l'indice du champ de fuites sur cette focalisation et établi la valeur optimum correspondant à l'ensemble des valeurs données pour les paramètres intérieurs de l'accélérateur.

Nous avons enfin établi que les collisions, ayant lieu en dehors du point d'intersection des orbites d'équilibre, du fait des dimensions finies du faisceau, entraînent des variations linéaires dans les valeurs des paramètres de sortie, en fonction de l'écart du point auquel a lieu la collision effective, par rapport à celui où la collision de deux particules décrivant les orbites d'équilibre se produit.

Les résultats que nous avons obtenus ne peuvent prétendre décrire complètement l'optique exacte de sortie d'un accélérateur réel. Nous nous sommes limités d'une part à un champ magnétique dont la loi de variation radiale présente un point anguleux, et d'autre part nous avons négligé tous les perturbateurs des divers paramètres de l'accélérateur. Pour tenir compte de tous ces effets sur l'optique d'un accélérateur réel, et établir la corrélation angulaire exacte entre les paramètres de sortie et la direction de recul à la collision, il faut déterminer expérimentalement la valeur de tous les paramètres, ainsi que leurs fluctuations, et étudier numériquement les effets de chacune de ces déviations, prises séparément, sur les paramètres des trajectoires sortantes.

Nous pensons, cependant, que le présent travail peut permettre de choisir les valeurs de certains paramètres, notamment celle de l'indice du champ de fuites, et de définir en première approximation l'aspect et les paramètres des trajectoires sortantes.

BIBLIOGRAPHIE

- 1) T. OHKAWA : University of Tokyo, Tokyo, Japan.
Private communication at the Symposium on Nuclear Physics of the Physical Society of Japan. October 1953.
- 2) T. OHKAWA : Two-beam fixed-field alternating gradient accelerator.
Rev. Sci. Instrum. 29, p. 108-17 (1958)
- 3) K. R. SYMON : FFAG Accelerators : Phys. Rev. 98, 1152 (A) (1955)
- 4) K. R. SYMON, D. W. KERST, L. W. JONES, L. J. LASLETT, and K. M. TERWIL-
LIGER (MURA) : FFAG Particle accelerators.
Phys. Rev. : 103, pp. 1837-59 (1956)
- 5) LASLETT L. J.; SYMON K. R. :
Particle orbits in fixed field alternating gradient accelerators; CERN
Symposium 1, 279 (1956)
- 6) OHKAWA T. :
On the two beam FFAG accelerator
MURA - 318 (5/7/1957)
- 7) F. T. COLE, R. D. HAXBY, L. W. JONES, C. H. PRUETT, and K. M. TERWIL-
LIGER : (MURA) : Electron Model FFAG accelerator.
Rev. Sc. Instrum. 28, pp. 403-420 (1957).
- 8) F.T. COLE and A. M. SESSLER : Design of a 50-MeV electron radial sector
FFAG accelerator.
MURA report 373 (4.11.1957)
- 9) MIDWESTERN UNIVERSITIES RESEARCH ASSOCIATION STAFF :
The MURA two-way electron accelerator.
CERN-Symposium 1959, p. 71-74 (1959)
- 10) M. BARBIER, F. A. FERGER, E. FISCHER, P. T. KIRSTEIN, G. L. MUNDAY,
M. MORPURGO, M. J. PENTZ, A. SCHOCH, A. SUSINI, and N. VOGT-NILSEN :
Studies of an experimental beam-stacking electron accelerator.
CERN Symposium 1959, p. 100-113 (1959)

- 11) Study programme on beam stacking processes.
 - a) PENTZ M. J. :
Beam stacking in FFAG Accelerators - Introduction.
CERN - PS/MJP-1 - Report 1.
 - b) VOGT-NILSEN N. :
Theory of R. F. acceleration in fixed field circular accelerators :
 - (i) The concept of buckets. Moving buckets far from transition energy.
CERN - PS/NVN-1 - Report 2
 - (ii) Moving buckets at transition energy
CERN - PS/NVN-2 - Report 3
 - (iii) Consequences of the energy oscillations of phase instable particles. The occurrence of buckets in multiple gap accelerator.
CERN 58-9 - Report 5
 - c) PENTZ M. J. :
Design of R.F. Modulation schemes.
Some problems in the design of a 100 MeV intersecting-beam electron accelerator.
CERN 58-16 - Report 4.
- 12) VOGT-NIELSEN N. :
The magnetic guide field and the orbital equations for a fixed field two way scaling accelerator
CERN 60-15 (1960)
- 13) PENTZ M. J., VOGT-NILSEN N. :
A study of orbits in two-way scaling FFAG Synchrotrons.
To be published in symposium of the International Conference on High Energy Accelerators, Brookhaven (1961).
- 14) KOLOMENSKIJ, A. A. : « Simmetrichnyj » kol'tsevoj fazotron s vstretchnymi poutchkami. (Un phasotron circulaire « symétrique » à faisceaux croisés).
Journal de physique théorique et expérimentale (J.E.T.P.) URSS 33, p. 298-9 (1957).
- 15) KANUNNIKOV V. N., KOLOMENSKIJ A. A., LEBEDEV A. N., OVCHINNIKOV E. P., STOLOV A. M., TITOV V. A., FATEEV A. P., YABLOKOV B. N. :
Investigations connected with the design of the accelerators of the ring phasotron type.
CERN Symposium 1959, pp. 89-99

- 16) DURAND E. :
Electrostatique et Magnétostatique
Masson et Cie; Paris (1956)
- 17) E. T. WHITTAKER et G. N. WATSON :
Modern Analysis.
Cambridge University Press, Cambridge (1952), p. 412.
- 18) HAGEDORN R.; HINE M. G. N.; SCHOCH A. :
Non linear orbit problems in synchrotrons
CERN Symposium I, 237 (1956)
- 19) ERDÉLYI A.; MAGNUS W.; OBERHETTINGER F.; TRICOMI F. G. :
Higher Transcendental Functions, Vol. 1.
Mc Graw-Hill Book Co Inc, N.Y. (1953)
- 20) HOBBSOON E. W. :
The theory of spherical and ellipsoidal Harmonics;
Chelsea Pub. Co.; N.Y. (1955).
- 21) MILNE W. E. :
Numerical solutions of Differential Equations
J. Wiley and Sons Inc. New York (1957).

TABLE DES MATIÈRES

	<i>Pages</i>
Index de quelques symboles utilisés dans le texte	5
Lettres latines	5
Lettres grecques	7
Avant-propos	9
Introduction	11

Première partie

Chapitre 1. Considérations sur les simplifications pouvant être apportées au calcul du potentiel vecteur $\vec{A}$	15
Chapitre 2. Caractéristiques imposées au champ magnétique par les consi- dérations de stabilité des orbites d'équilibre vis-à-vis des oscillations bétatroniques	21
Chapitre 3. Généralités sur la topographie du champ magnétique . . .	26
3.1 - Cas général où l'indice du champ est variable	27
3.2 - Cas particulier de l'indice du champ constant	29
3.2.1 - Recherche de solutions exactes pour la définition de la topographie du champ magnétique dans l'espace	30
3.2.2 - La valeur de l'indice du champ appartient à l'en- semble des nombres entiers	32
3.2.3 - n est différent d'un entier	34
3.3 - Définition des pièces polaires	35
3.4 - Passage de la région du champ d'accélération à celle du champ de fuites	38
3.4.1 - Raccordement des surfaces équipotentielles . . .	40
3.4.2 - Définition de la partie radiale du champ : $h(r)$. .	42
	81

	<i>Pages</i>
Chapitre 4. Equations du mouvement	45
Chapitre 5. Résolution des équations du mouvement	52
5.1 - Paramètres calculés	52
5.2 - Précision, précautions et flexibilité du calcul	53
5.3 - Conditions initiales et paramètres à introduire au programme 330PI	56
5.4 - Données du 330PI	57
Chapitre 6. Résultats	60
6.1 - Trajectoires du plan $Z = 0$	61
6.1.1 - Trajectoires sortant par l'intérieur de l'accélérateur	62
6.1.2 - Trajectoires sortant vers l'extérieur de l'accélérateur	64
6.2 - Trajectoires des plans $\phi = k\pi/N$	69
6.3 - Trajectoires gauches	71
6.4 - Effets des dimensions finies du faisceau	73
Conclusion	75
Bibliographie	78

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

DIAGNOSTIC DU PLASMA PAR LES MÉTHODES RADIOÉLECTRIQUES

Vu :

Les Membres du Jury,

MM. A. SARAZIN

J. LAFOUCRIÈRE

Mme M. ERICSON

Vu et approuvé :

Le Doyen de la
Faculté des Sciences

Pour le Doyen
L'Assesseur

Jean BRACONNIER

Vu et accordé le permis d'imprimer :

Lyon, le 25 novembre 1961

Le Recteur,
Président du Conseil de l'Université

P. LOUIS

